

ZARYS GEOMETRII ELEMENTARNEJ

Z LICZNYMI ZADANIAMI

DO UŻYTKU SZKÓŁ ŚREDNICH

OPRACOWAŁ

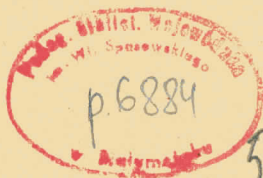
WŁ. WOJTOWICZ



NAKLAD GEBETHNERA I WOLFFA
WARSZAWA ——— LUBLIN ——— ŁÓDŹ
KRAKÓW ——— G. GEBETHNER I SPÓŁKA
SKŁADY GŁÓWNE: POZNAŃ, M. NIEMIERNIEWICZ
NEW-YORK THE POLISH BOOK IMPORT. CO., INC.

*Skryme
Fisłipowicz.*

*54 m.
+ 50
114 m.*



PRZEDMOWA.

J'ai horreur d'un enseignement qui n'est pas toujours sincère: le respect de la vérité est la première leçon morale, sinon la seule, qu'on puisse tirer de l'étude des sciences. Sans doute, il y a des démonstrations qui ne sont pas rigoureuses et qui sont excellentes, parce qu'elles laissent dans l'esprit une image qui ne s'efface pas..... et dont la clarté suffit à guider dans les applications; si elles présentent quelque lacune, il faut le savoir, et il est bon de savoir où est cette lacune. Aussi bien dans la vie pratique que dans la spéculation, il importe de distinguer ce que l'on comprend avec certitude, ce dont on est justement persuadé, ce que l'on croit; il est bon de distinguer les choses que l'on possède entièrement et celles dont on peut user, sous certaines conditions.

Jules Tannery.

Nie mogę odmówić sobie przyjemności zacytowania tych kilku słów znakomitego uczonego i pedagoga. Trudno o jaśniejsze postawienie zagadnienia ścisłości w nauczaniu, zwłaszcza w nauczaniu matematyki. Uczeń należycie ćwiczony powinien jasno formułować zagadnienia, zdawać sobie sprawę ze środków, którymi rozporządza przy rozwiązywaniu tych zagadnień, wreszcie uświadamiać sobie dokładnie granicę między tym, co wie napewno i umie gruntownie, a tym co jest tylko mniej lub więcej prawdopodobnym przypuszczeniem. Nie są to bynajmniej jedyne cele, które winniśmy stawiać sobie w nauczaniu matematyki, jeżeli jednak nie osiągnęliśmy ich, to nie rozwinęliśmy w uczniu jasności myślenia i szczerości względem samego siebie, a więc nauczanie nasze było bezwartościowe.

Co się tyczy dowodów, to powinny one być bezwzględnie ścisłe w tym sensie, że wniosek winien istotnie wynikać z przesłanek wyraźnie uświadomionych i wymienionych. Jeżeli więc nie możemy na danym poziomie czegoś dowieść lub jeśli dowód uważamy za zbyt zawiły, winniśmy odpowiednią prawdę założyć jako postulat. To, co *Tannery* nazywa dowodem nieściśłym, a co może byłoby lepiej nazwać po prostu ilustracją, zaczerpniętą bądź z innych dziedzin matematyki, bądź z doświadczenia zmysłowego, stanowi środek dydaktyczny nieoceniony i niczym nie dający się zastąpić. Nie wyobrażam sobie dobrego pedagoga, któryby nie posługiwał się obficie takimi ilustracjami: pozostawiają one w istocie w umyśle obraz nie zacierający się nigdy, ale co ważniejsze — wzbudzają w uczniu głębokie przeświadczenie o istnieniu poszukiwanej prawdy, wiążą ściśle skromną jego wiedzę matematyczną z doświadczeniem, czasem, podsuwają mu rację istnienia tej prawdy lub wskazują drogę, na której znaleźć można dowód logiczny, a często rzucają nieoczekiwane światło na związki, zachodzące między najrozmaitszymi dziedzinami jego doświadczenia. O jedno tylko musimy koniecznie dbać: uczeń powinien zawsze zdawać sobie sprawę z tego, że ilustracja nie jest dowodem, a wówczas będzie miał bodziec do szukania dowodu.

Z pośród rozmaitych działów matematyki, wykładanych w szkole średniej, geometria może najlepiej nadaje się do konsekwentnego przeprowadzenia tych zasad, a to ze względu na prostotę zagadnień, które stawia uczniowi, na łatwość, z jaką uczeń może sprawdzić trafność każdego swego przypuszczenia, wreszcie na charakter nawpół konkretny tej nauki.

Rzecz prosta, że można w rozmaity sposób urzeczywistniać postawione powyżej zasady. W książce niniejszej obrałem sposób następujący.

Przedewszystkiem starałem się wszędzie oddzielić możliwe najwyraźniej definicje, postulaty *) i twierdzenia, oraz podkreślić, które pojęcia uważamy za pierwotne, nie podlegające definjowaniu. Uczyniłem to dlatego, że inaczej niepo-

*) Nazwałem je niezbyt może trafnie pewnikami, wołałem jednak obrać termin zrozumiały dla każdego ucznia, nawet nie znającego łaciny.

dobna zrozumieć budowy rozumowania dedukcyjnego, a powtóre dlatego, że uczenia powinniśmy przyzwyczaić do jasnego zdawania sobie sprawy, kiedy opiera się on na intuicji, a kiedy snuje wnioski z przesłanek.

Na początku książki podałem spis pewników (postulatów) geometrii. Uczeń poznaje pewniki stopniowo, w miarę potrzeby, formułując je na podstawie intuicji, nie powinien jednak „wkuwać” ich. Spis pewników ma tylko ułatwiać odszukiwanie tych z pośród nich, które są nam w danym rozumowaniu potrzebne. W pierwszych rozdziałach poznajemy lwią część pewników; musimy je wszystkie z uczniami omówić i sformułować, (ponieważ opisują one te cechy pojęć pierwotnych — punktu, prostej etc. — na których będziemy się dalej opierać), nie powinniśmy jednak wymagać, by klasa wszystkie te pewniki odrazu zapamiętała: przyjdzie to samo przez się w ciągu trzech lat nauczania geometrii.

Co się tyczy obranego w tej książce układu pewników, to zawiera on wiele pewników „zbytecznych”, nie jest to jednak wadą z punktu widzenia dydaktycznego. Opierając się na układzie minimalnym byłibyśmy często zmuszeni do przeprowadzania długich i zbyt subtelnych rozumowań. Zdaje mi się natomiast, że byłoby rzeczą wielce ciekawą i pouczającą, gdyby nauczyciel klasy VIII, mający do czynienia z uczniami umysłowo dojrzałymi, spróbował poddać dalszej analizie niektóre z tych „pewników”: uczniowie przekonałoby się, że są wśród nich takie, które wynikają logicznie z pozostałych. Do tego celu nadaje się zwłaszcza grupa VI, którą nazwałem pewnikami ciągłości. Tak samo rzeczą ciekawą byłoby wykazanie, że istnieją pewniki równoważne, tak iż jeden z nich możemy zastąpić innym, nie naruszając budowy całej teorii, a wtedy pierwszy pewnik staje się twierdzeniem (np. pewnik IV o równoległych, twierdzenie § 75 o istnieniu jednej równoległej i twierdzenie o sumie kątów w trójkącie — porów. zadania 68 i 69 na str. 65). Dwie lub trzy lekcje, poświęcone na taką analizę, niewątpliwie przyczyniłyby się do poruszenia umysłów, a może nawet do skierowania ich ku poważnemu traktowaniu zagadnień filozoficznych.

Punktem wyjścia w nauczaniu geometrii, podstawą i przewodnią nicią winna być konstrukcja (do której w stereometrii dołącza się robienie mo-

deli). Figura z jej różnorodnymi własnościami powinna powstawać pod ręką ucznia — prowadzi go ona wtedy droga naturalną do stawiania sobie zagadnień. Teoria mniej lub więcej abstrakcyjna stanowi w takim razie koronę jego badań.

Jeżeli staniemy na tym punkcie widzenia, wówczas z całą stanowczością musimy odrzucić wszelkie t. zw. konstrukcje hipotetyczne. Jeżeli np. w celu zbadania jakiejś figury lub dowiedzenia twierdzenia, którego prawdziwość wydaje się nam mniej lub więcej prawdopodobną, chcemy poprowadzić linię pomocniczą, musimy koniecznie umieć ją zbudować, nie znając bowiem odpowiedniej konstrukcji, musielibyśmy założyć samo istnienie tej linii.

Przyjąwszy tę zasadę, musieliśmy w księdze I (poświęconej teorii figur równych i symetrycznych) wysunąć na plan pierwszy twierdzenie o równości trójkątów, mających wszystkie boki odpowiednio równe. Jak wiadomo, dowody tego twierdzenia, podawane w podręcznikach, a wymagające rozważania różnych kształtów i położeń trójkątów, są dla uczniów na tym poziomie trudne i zawile. Sprawa ogromnie się upraszcza, jeśli tę cechę równości założymy jako postulat i wysuniemy na czoło teorii figur równych. Postulat ten wynika z niezmiernie prostego a pouczającego doświadczenia.

Przy pierwszej nadarzającej się sposobności zwróciłem uwagę czytelnika na związek między twierdzeniami: prostym, przeciwnym i odwrotnym. Zrozumienie tego związku i systematyczne stosowanie go nie sprawia, jak się przekonałem, najmniejszej trudności dzieciom 13 — 14-letnim, stanowi zaś dla nich bardzo ważną nić przewodnią przy orjentowaniu się w budowie teorii matematycznej. Zwłaszcza w nauczaniu algebry uczeń nigdy nie zrozumie potrzeby badania warunków koniecznych i dostatecznych istnienia pewnych prawd, jeżeli na bardziej konkretnym materiale geometrycznym nie wdrożono go systematycznie do ujmowania tego związku.

O wiele trudniej jest odczuć potrzebę t. zw. dowodów istnienia (*théorèmes d'existence*). W nauczaniu heurystycznym definicja nowego pojęcia wylania się z konstrukcji, odpada więc potrzeba dowodzenia, że przedmiot zdefiniowany istnieje. Zdarza się jednak, że uczniowie na innej drodze dochodzą do wytworzenia nowego pojęcia, a wówczas zmuszeni jesteśmy wyjaśnić im potrzebę odpowiedniego dowodu.

Pojmują oni wprawdzie z łatwością, o co tu chodzi, ale gdy mają okazję do wprowadzenia nowego określenia, zapominają zazwyczaj o potrzebie dowodu istnienia — prawdopodobnie dlatego, że w umysłach ich tkwi wyobrażenie określanego przedmiotu, uczniowie zaś wyobrażenie to gmatwają z pojęciem. Radę na to znam tylko jedną: systematyczne i cierpliwe przekonywanie ucznia o potrzebie dowodu istnienia, ilekroć zapomniał o tym.

Księga II zawiera teorię równoważności wielokątów, opartą na definicji, według której równoważnymi nazywamy wielokąty, dające się pociąć na jednakową (oczywiście skończoną) liczbę wielokątów parami równych sobie. Określenie takie spotykamy oddawna w wielu podręcznikach, autorowie jednak nigdy prawie nie wyzyskują go: podawszy definicję, przechodzą copędzej do obliczania pól, stosując metody, nie z ową definicją wspólnego nie mające. Tymczasem doświadczenie przekonało, że teoria równoważności, oparta na tym określeniu, prowadzi do szeregu łatwych i niezmiernie dla uczniów ciekawych zadań, a przytym znakomicie przyczynia się do rozwinięcia intuicji geometrycznej, o którą powinniśmy dbać tyleż, co i o logikę.

Całą tę teorię oparłem na pojęciu t. zw. równoważności „przez dodawanie”; o równoważności „przez odejmowanie” mówię bardzo pobieżnie w §§ 186, 187; uważam przytym, że zagadnienie równoważności przez odejmowanie możemy w szkole całkowicie pominąć bez żadnej szkody dla uczniów. Zasadnicza różnica między tymi dwoma pojęciami występuje wyraźnie przy wielościanach, ale cała ta sprawa jest zbyt zawiła dla szkoły średniej.

Księga III zawiera czysto geometryczną teorię odcinków proporcjonalnych i wynikające z niej teorie jednokładności, podobieństwa etc. Wykład oparłem na pomysle *Vailati*'ego *), sposób jednak przeprowadzenia tego pomysłu jest u mnie zupełnie odmienny.

Cztery odcinki dane w pewnym porządku nazywam proporcjonalnymi, jeżeli prostokąt z pierwszego i czwartego

*) Di un modo di riattacare la teorie delle proporzioni fra segmenti a quella dell'equivalenza (*Opere di G. Vailati*, p. 399). Przekład polski tej rozprawki był drukowany w czasopiśmie „Wektor”, rok IV, str. 22.

jest równoważny prostokątowi z drugiego i trzeciego. Wobec takiego punktu wyjścia musimy ustalić, jakie są własności proporcji między odcinkami, czy mianowicie możemy stosować do niej to samo postępowanie, które w klasach niższych stosowaliśmy do proporcji między liczbami wymiernymi. Przystawianie wyrazów proporcji wynika bezpośrednio z definicji; pewną trudność stanowią tylko dwie inne własności, o których mowa w §§ 206, 207. Uważam, że twierdzenia, o których mowa w tych paragrafach, należy traktować w szkole jako ćwiczenia, gdyż grają one rolę jedynie pomocniczą. Natomiast przeważną część ćwiczeń XXXI należałoby przerobić dokładnie, aby oswoić uczniów z nowym pojęciem i nową dla nich metodą ustalania związku proporcjonalności. Prócz tego należy podkreślić i dobrze uświadomić uczniom, że w przypadku prostokątów o bokach wymiernych, definicja ta pokrywa się ze zwykłym arytmetycznym pojęciem proporcji między liczbami.

Z dwóch teorii: jednokładności i podobieństwa wysunąłem na czoło jednokładność. Argumenty naukowe przemawiające za tym są oczywiste dla każdego matematyka, sądzę jednak, że i względy dydaktyczne wymagają takiego właśnie układu materiału. Istotnie, teoria jednokładności zapoznaje nas z podstawowymi faktami w tej dziedzinie geometrii, daje metodę rozwiązywania mnóstwa zagadnień konstrukcyjnych, silnie przemawia do zmysłu wzrokowego, a przez to lepiej uwidocznia związki między figurami geometrycznymi, wreszcie jest jedną z najprzystępniejszych dla ucznia i najciekawszych metod przekształcania figur i przez to samo może stanowić dobrą propedeutykę geometrii rzutowej, której elementy w ten lub inny sposób muszą przystąpić do szkoły średniej. — Po zapoznaniu się z jednokładnością uczniowie łatwo i w krótkim czasie opanowują pojęcie podobieństwa wielokątów.

Rozdział V tej samej księgi traktuje o przekształceniu harmonicznym. Dział ten rozwinąłem trochę szerzej ze względu na jego wartość kształcącą, gdyby jednak nauczyciel nie rozporządzał odpowiednim czasem, może poprzestać na przerobieniu §§ 224—234. Teorię biegunowych, poprzecznych oraz pojęcie o pękach kół (o czym mowa w §§ 269—274 księgi IV), włączyłem tylko dlatego, by uczniowie pracu-

jący bardziej samodzielnie mogli zapoznać się z tymi interesującymi teorjami. Rzecz prosta, że w normalnym kursie szkolnym nie ma miejsca na takie zbyt specjalne zagadnienia.

Muszę tu jeszcze powiedzieć parę słów o przyczynie, która skłoniła mnie do czysto geometrycznego potraktowania tego działu. Teorię wielkości geometrycznych proporcjonalnych można, moim zdaniem, wyłożyć tylko trzema sposobami, jeśli chodzi o wykład ścisły: sposobem arytmetycznym, sposobem geometrycznym i sposobem pośrednim, euklidesowskim. Wykład arytmetyczny (stosowany np. w lepszych podręcznikach francuskich) wymaga uprzedniego opracowania, i to bardzo dokładnego, teorii liczb niewymiernych oraz teorii mierzenia, a więc przez to samo mało się nadaje do naszych warunków. Istotnie, w szkołach naszych omawiają dziś pojęcie mierzenia w całej rozciągłości na początku klasy piątej (niektórzy robią to już w klasie czwartej przy badaniu kątów w kole), a więc najtrudniejsze pojęcie matematyki elementarnej omawiać musimy z uczniami 14 lub 15-letnimi, co sprzeciwia się wszelkim zdrowym zasadom pedagogicznym. Toteż rezultat znany jest dobrze każdemu nauczycielowi: uczniowie powtarzają mniej lub więcej trafnie słowa nauczyciela, nie rozumiejąc ich znaczenia. Mamy tu do czynienia z typowym okazem werbalizmu w nauczaniu.

Sposób euklidesowski, powszechnie stosowany w podręcznikach włoskich, jeszcze mniej nadaje się do szkoły *). Jakoż sposób ten — bardzo zresztą piękny i pomysłowy — niczym innym nie jest, jak teorią arytmetyczną liczb niewymiernych, ubraną w terminy (lecz nie w obrazy) geometryczne. Ta szata geometryczna tak doskonale zaciemnia istotną treść zagadnienia, że dopiero po 20 wiekach dostrzeżono, iż precyzyjna definicja przekroju Dedekinda zawiera się już w księdze V „Elementów” Euklidesa.

Pozostaje tedy sposób trzeci, geometryczny, który ma tę zaletę, że operuje obrazami i pojęciami doskonale znanymi uczniom, umożliwia wykład podobieństwa i jednokładności przed teorią mierzenia i pozwala nam przez to samo

*) Typowy wykład znaleźć można w książce: *Enriques i Amaldi* Zasady geometrii elementarnej. Warszawa 1915.

odsunąć teorię mierzenia do chwili, gdy umysł ucznia jest lepiej przygotowany do jej przyjęcia *).

Powstaje pytanie, kiedy ma być wykładana teoria mierzenia? Moim zdaniem, najwłaściwiej byłoby przenieść do klasy piątej początkowe rozdziały stereometrii, odsuwając do klasy szóstej całą teorię mierzenia wraz z pomiarem koła. W ten sposób w klasie piątej można by w algebrze zapoznać uczniów propedeutycznie z pojęciem liczby niewymiernej, w klasie zaś szóstej powrócić do tej sprawy przy teorii logarytmów, a w geometrii pokazać zastosowanie tego pojęcia do mierzenia wielkości. Zresztą, gdyby nawet ktoś czuł się zbyt skrzepowany istniejącą tradycją szkolną i chciał koniecznie mówić o mierzeniu już w klasie piątej, to i w takim razie lepiej byłoby odsunąć tę sprawę na koniec roku, gdy uczeń zapoznał się już w algebrze choćby pobieżnie z liczbą rzeczywistą i, bądź co bądź, w ciągu roku dojrzał trochę pod względem umysłowym.

Księga IV traktuje o mierzeniu. Odstąpiłem od utartych metod wykładu głównie przy wprowadzeniu pojęcia pola prostokąta. Zazwyczaj mierzenie pól opierają na twierdzeniu, że w prostokątach o równych podstawach pola są proporcjonalne do wysokości. Twierdzenie to w wykładzie tradycyjnym ma dwie wady: po pierwsze dowód jego jest nieścisły, gdyż zakłada pocichu, że każdy prostokąt posiada pole jednoznacznie wyznaczone; powtórę dowód ten jest dla uczniów niejasny, o ile nie opiera się na zupełnej i ścisłej arytmetycznej teorii liczb rzeczywistych. Istotnie, dowód ten jest tylko zamaskowaną definicją przekroju, a wobec tego wolałem postąpić otwarcie i wprowadzić pojęcie pola prostokąta jako przekroju, odpowiadającego iloczynowi dwóch liczb rzeczywistych.

*) Każdemu matematykowi musi mimowoli nasunąć się inny pomysł geometrycznej teorii proporcji. Można by mianowicie określić odcinki proporcjonalne jako takie, które powstają na prostych dowolnego pęku, gdy przetniemy je pękiem prostych równoległych. Dalsza teoria rozwija się bardzo ładnie, wymaga jednak wprowadzenia twierdzenia *Desarguesa*. Otóż tw. *Desarguesa* z łatwością dałoby się wprowadzić, gdybyśmy się zdecydowali na skasowanie w szkole sztucznego podziału geometrii na planimetrię i stereometrię.

Teorii wielokątów foremnych poświęcone są §§ 281, 290. Uważam, że omawianie w szkole foremnego pięciokąta, dziesięciokąta i piętnastokąta jest rzeczą zupełnie zbyteczną i tłumaczy się tylko przemożnym wpływem tradycji: czas, poświęcany na te figury, można by zużytkować na zagadnienia bardziej kształcące. Jeżeli jednak ktoś jest odmiennego zdania i obstaje przy tym materiale, powinien skorzystać ze sposobności i omówić nowe dla uczniów i ciekawe pojęcie wielokątów gwiaździstych. Tak samo związki między bokami wielokątów wpisanych i opisanych o n i $2n$ bokach powinny conajwyżej figurować jako zadania.

Dalsze rozdziały książki zawierają stereometrię. Ze względu na bardzo skąpy wymiar czasu, który według naszych planów szkolnych poświęcić możemy tej pięknej nauce, ograniczyłem materiał do możliwego minimum, starając się zarazem uprościć wykład i ujednolicić metody dowodzenia, zwłaszcza w dziale, poświęconym mierzeniu objętości i pól powierzchni. Obrąłem przytym metodę, która stanowi naturalną propedeutykę pojęcia całki określonej, jeśli bowiem mamy wprowadzać w klasie VII lub VIII pojęcia pochodnej i całki, musimy je starannie przygotować w kursie klas V i VI. Z przykrością zdecydowałem się na opuszczenie twierdzenia Eulera i przez to samo na bardzo powierzchowne potraktowanie wielościanów; niestety, nie mamy dziś na to czasu w szkole, jak również na geometrię figur na kuli.

Przy nauczaniu stereometrii uważam za rzecz zasadniczej wagi budowanie siatek i modeli oraz wykreślanie figur w rzucie ukośnym równoległym. Odpowiedni rozdział umieściłem na końcu książki, jako „dodatek do stereometrii”, a to dla tego, by nie krępować zbytnio nauczyciela. Jakoż najodpowiedniejszą może chwilą do wprowadzenia tych rzutów jest ta, gdy uczeń poznał podstawowe twierdzenia o położeniu prostych i płaszczyzn w przestrzeni; równie dobrze jednak da się pomyśleć inny rozkład materiału: możemy mianowicie kreślenie brył i budowanie modeli potraktować jako propedeutykę stereometrii, a w takim razie muszą one poprzedzać wszelkie systematyczne badanie związków przestrzennych.

Książka zawiera inny jeszcze „dodatek”, mianowicie dodatek do księgi I. Traktuje on o wyznaczaniu miejsc geo-

metrycznych i o metodach rozwiązywania zadań konstrukcyjnych. Ze względu na niewielką liczbę godzin, którą dziś w klasie V poświęcają w wielu szkołach na geometrię, z całego tego działu uważam za niezbędne tylko przerobienie w klasie piątej kilkunastu przykładów na zastosowanie analizy geometrycznej: w klasie czwartej uczeń stosuje tę metodę badania pod okiem nauczyciela nawpół świadomie, dobrze więc będzie, jeśli w roku następnym uświadomi ją sobie i utrwali na przykładach. Resztę „dodatku do księgi I” umieściłem z myślą o uczniach, pragnących poznać geometrię w zakresie nieco obszerniejszym od tego, który im daje wykład szkolny.

Książka zawiera znaczną liczbę zadań (zgorą 1400). Uwzględniłem przedewszystkim trzy typy zadań: 1) łatwe i ciekawe twierdzenia, na których uczeń ćwiczy się nie tylko w wynajdywaniu i budowaniu dowodów, lecz często w uogólnianiu poznanych prawd, czasem zaś w odszukiwaniu związków logicznych między poszczególnymi grupami twierdzeń (np. zadania 1—3 na str. 182); 2) zadania konstrukcyjne; 3) poszukiwanie miejsc geometrycznych. Drugi typ, kształcący przedewszystkim intuicję geometryczną i wynalazczość, nie jest dziś u nas dostatecznie uprawiany, trzeci zaś typ jest w szkołach naszych prawie nieznany, pomimo że przy odpowiednim traktowaniu przyczynia się znakomicie do rozwinięcia pewnej specjalnej, niezmiernie cennej formy intuicji, którą z braku odpowiedniejszego terminu nazwałbym cynematyczną.

Z metod rozwiązywania zadań konstrukcyjnych [uwzględniłem przedewszystkim dwie: metodę miejsc geometrycznych i przekształcenia jednokładnego. Opanowanie tych dwóch metod oraz poznanie kilku przykładów przekształcenia symetrycznego i metody algebraicznej powinno wystarczyć ogółowi uczniów; kto chciałby poznać inne sposoby rozwiązywania zadań, znajdzie je bądź w „dodatku do księgi I”, bądź w książce Petersena.

Podąłem niewielką liczbę ćwiczeń i zagadnień z geometrii praktycznej. Niestety, większą część książki pisałem na prowincji, zdala od wszelkich bibliotek, nie mogłem więc wyzyskać bogatego i niezmiernie dla uczniów ciekawego materiału (wymagającego tylko najprostszych przyrządów, które

każdy sam sobie zrobić może), jaki znaleźć można w dziełach dawnych geometrów: Solskiego, Taqueta, Fineusa i innych.

Co się tyczy t. zw. zadań na obliczanie, to podąłem dość znaczną ich ilość, poczynając od księgi III. Wcześniej-sze wprowadzanie tych zadań może się tylko szkodliwie odbić na opanowaniu myślenia geometrycznego.

Drukiem spacjaowanym podane są te zadania, których przerobienie uważam za szczególnie ważne.

Parę słów jeszcze o metodzie wykładu, przyjętej w książce niniejszej. Nauczanie musi być prowadzone metodą heurystyczną i genetyczną — pod tym względem dwóch zdań być nie może, wprowadzanie jednak systematyczne tych metod do podręcznika uważam za bezcelowe. Zadaniem książki nie jest zastąpienie nauczyciela. Podręcznik winien służyć do powtórzenia i przypomnienia prawd, opracowanych w klasie, powinien więc mieć taki układ, któryby ułatwiał odszukanie i szybkie przejrzenie potrzebnych definicji lub twierdzeń. Kierując się tym, zachowałem przeważnie staroświecki wykład dogmatyczny, dorzucając zresztą w wielu miejscach uwagi, które mogą naprowadzić ucznia na spostrzeżenia, dotyczące związku między poszczególnymi teorjami.

Oto są zasady, którymi kierowałem się przy pisaniu niniejszego podręcznika. Czy są one w zupełności słuszne i czy wykonanie odpowiada postawionemu celowi, niech osądzi kompetentna krytyka. Jedno tylko chciałbym podkreślić: nie umieściłem w książce nic takiego, czego bym nie wypróbował wielokrotnie w szkole.

Za wszelkie uwagi krytyczne będę bardzo wdzięczny. Wszyscy czujemy, że tradycyjny u nas wykład geometrii jest gruntownie zły, naprawienie jednak tego zła, stworzenie wykładu nowożytnego, zgodnego z wymaganiami nauki i pedagogiki, a zarazem przystosowanego do umysłowości i potrzeb naszego narodu, jest rzeczą trudną, przerastającą siły jednego człowieka. Potrzeba tu współpracy całego grona nauczycieli. Książkę swoją traktuję tylko jako przyczynek do tej budowli, którą powinniśmy wznieść i, mam nadzieję, wznieśliemy wspólnymi siłami. Będę niezmiernie rad, jeżeli książka ta pobudzi innych autorów do lepszego opracowania tego samego tematu.

Na zakończenie niech mi wolno będzie spełnić miły obowiązek podziękowania kolegom Stanisławowi Garlickiemu, Juljuszowi Rudnickiemu i Stefanowi Kwietniewskiemu, którzy dali mi niejedną dobrą radę przy opracowaniu tego podręcznika. Rzecz prosta, iż nie są oni odpowiedzialni za sposób, w jaki rady ich wyzyskałem.

W chwili, gdy rozpoczynałem druk książki, obowiązywała pisownia, uchwalona przez Akademię 17 lutego 1917 r., do niej też musiałem się stosować.

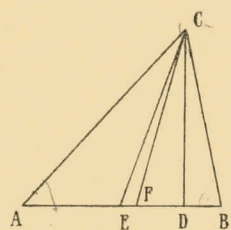
Kielce, w lipcu 1919 r.

Spis liter greckich, użytych w książce niniejszej:

α	czytaj	alfa
β	„	beta
γ	„	gama
δ	„	delta
ε	„	epsilon
η	„	eta
θ	„	teta
λ	„	lambda
π	„	pi
ρ	„	ro
σ, Σ	„	sigma
φ	„	fi
ψ	„	psi
ω	„	omega.

Spis symbolów, używanych w zadaniach konstrukcyjnych.

I.



W trójkącie dowolnym $\triangle ABC$	
boki BC, CA, AB oznaczamy przez	a, b, c ;
kąty $\sphericalangle CAB, \sphericalangle ABC, \sphericalangle BCA$	„ A, B, C .
wysokość CD	„ h_c ;
analogicznie, wysokości poprowadzone do boków a, b ,	„ h_a, h_b ;
dwusieczną CE	„ d_C ;
dwusieczne kątów A i B	„ d_A, d_B ;
środkową CF	„ s_c ;
środkowe, poprowadzone do boków a, b	„ s_a, s_b ;
odcinki BE, EA , wyznaczone przez dwusieczną d_C	„ u_a, u_b ;
odcinki BD, AD , jako rzuty boków a, b	„ r_a, r_b ;
promień koła wpisanego	„ ρ ;
promienie kół zawpisanych, stycznych do boków a, b, c	„ ρ_a, ρ_b, ρ_c ;
promień koła opisanego	„ R .
kąt między środkową s_a i bokiem a	„ $\sphericalangle(s_a, a)$ it. p.

II.

W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$, boki a, b równają się sobie, a więc C oznacza kąt, zawarty między równymi bokami.

III.

W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$ kąt prosty oznaczamy przez C .

Inne oznaczenia, jak poprzednie.

IV.

W czworoboku dowolnym $ABCD$

boki AB, BC, CD, DA oznaczamy przez	„	„	a, b, c, d ,
kąty czworoboku	„	„	A, B, C, D ,
przekątne AC, BD	„	„	e, f ,
kąt między przekątnymi	„	„	α .
punkt przecięcia się przekątnych	„	„	E .

**Spis pewników,
na których został oparty wykład w książce niniejszej.**

**I. Pewniki, dotyczące połączenia pojęć podstawowych:
punktu, prostej i płaszczyzny.**

- Pewnik Ia. Przez każde dwa punkty przechodzi prosta, ale tylko jedna. Inaczej: dwa punkty wyznaczają prostą.
- „ Ib. Prosta i punkt nie leżący na niej wyznaczają płaszczyznę. Inaczej: dwie proste przecinające się wyznaczają płaszczyznę. Albo też: trzy punkty, nie leżące na jednej prostej, wyznaczają płaszczyznę.
- „ Ic. Prosta, łącząca dwa dowolne punkty płaszczyzny, leży na tej płaszczyźnie.
- „ Id. Dwie płaszczyzny, mające wspólny punkt, przecinają się według prostej.

II. Pewniki, dotyczące uporządkowania punktów.

- Pewnik IIa. Każdy punkt na prostej dzieli ją na dwie części (zwane półprostymi), z których każda zawiera dowolną ilość punktów.
- „ IIb. Każda prosta leżąca na płaszczyźnie dzieli ją na dwie części

ci (zwane półpłaszczyznami), z których każda zawiera dowolną ilość punktów.

- Pewnik IIc. Każda płaszczyzna dzieli przestrzeń na dwie części, z których każda zawiera dowolną ilość punktów.

III. Pewniki, dotyczące równości odcinków, kątów i trójkątów.

- Pewnik IIIa. Po każdej stronie danego punktu A na prostej istnieje jeden i tylko jeden taki punkt B , że odcinek AB równa się danemu odcinkowi.
- „ IIIb. O ile nie uwzględniamy zwrotu odcinka, możemy powiedzieć, że $AB = BA$.
- „ IIIc. Dwa odcinki równe trzeciemu są sobie równe.
- „ IIId. Sumy równych odcinków są sobie równe.

- Pewnik IIIa'. Po każdej stronie danej półprostej istnieje jedna i tylko jedna półprosta, tworząca z nią kąt równy danemu kątowi.
- „ IIIb'. O ile nie uwzględniamy zwrotu kąta, możemy powiedzieć, że $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOA$.
- „ IIIc'. Dwa kąty równe trzeciemu są sobie równe.
- „ IIId'. Sumy równych kątów są sobie równe.
- „ IIIe. Kąty proste są sobie równe.

- Pewnik IIIf. Jeżeli trzy boki jednego trójkąta równają się trzem bokom

drugiego, wówczas i kąty jednego trójkąta równają się kątom drugiego, czyli trójkąty są sobie równe.

Pewnik IIIg. Jeżeli mamy dany trójkąt $\triangle ABC$, a prócz tego na dowolnej prostej m mamy odcinek $A'B' = AB$, wówczas po każdej stronie prostej m istnieje przynajmniej jeden taki punkt C' , że

$$\triangle A'B'C' = \triangle ABC,$$

IV. Pewnik o równoległych.

Pewnik IV. Jeżeli dwie proste tworzą z poprzeczną kąty naprzemianległe wewnętrzne nierówne, wówczas proste te nie są równoległe (zatem przecinają się).

V. Pewnik, dotyczący figur równoważnych.

Pewnik V. Żaden wielokąt nie może być równoważny swej części.

VI. Pewniki, dotyczące ciągłości.

Pewnik VIa. (pewnik Archimedesza dla odcinków). Jeżeli mamy dane dwa odcinki a , b , przy czym $a > b$, wówczas możemy znaleźć tak wielką liczbę n , że będzie $nb > a$.

„ VIb. (pewnik Archimedesza dla kątów). Jeżeli mamy dane dwa kąty $\sphericalangle \alpha$ i $\sphericalangle \beta$, przy czym $\sphericalangle \alpha > \sphericalangle \beta$, wówczas możemy znaleźć tak wielką liczbę n , że będzie $n\sphericalangle \beta > \sphericalangle \alpha$.

„ VIc. Jeżeli punkt wewnętrzny koła

połączymy z punktem zewnętrznym za pomocą odcinka prostej, wówczas odcinek ten przecnie okrąg koła w jednym i tylko w jednym punkcie.

Pewnik VIId. Jeżeli punkt wewnętrzny koła połączymy z punktem zewnętrznym za pomocą łuku jakiegokolwiek innego koła, wówczas łuk ten przecnie dany okrąg w jednym i tylko w jednym punkcie.

„ IVe. Jeżeli na prostej mamy dwa zbiory punktów H i K , przy czym punkty H leżą w lewo od punktów K , i jeżeli do każdego dowolnie zadanego odcinka $\ast$ możemy dobrać takie dwa punkty H_n i K_n , że odległość pomiędzy nimi jest mniejsza od $\ast$, wówczas na prostej istnieje jeden i tylko jeden punkt P , który rozdziela wszystkie punkty H od punktów K .

Wiadomości wstępne.

§ 1. W geometrii istnieją pojęcia tak proste, że nie wymagają żadnych objaśnień. Są to **punkt**, **prosta** (albo linja prosta) i **płaszczyzna**.

Punkty oznaczamy wielkimi literami łacińskimi $A, B, C, \dots$, proste małymi literami łacińskimi $a, b, c, \dots$, wreszcie płaszczyzny oznaczamy literami greckimi $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

Każdy zbiór punktów nazywamy *figurą geometryczną* lub krótko: *figurą*.

§ 2. O punktach, prostych i płaszczyznach możemy wypowiedzieć szereg oczywistych prawd, które nazwiemy pewnikami.

Pewnik Ia. *Przez każde dwa punkty przechodzi prosta, ale tylko jedna.*

Ten sam pewnik wyrażamy słowami:

dwa punkty wyznaczają prostą.).*

Prostą przechodzącą przez punkty A i B nazywamy prostą AB .

Mowimy też, że punkty A i B leżą na prostej AB lub że prosta AB łączy punkty A i B .

*) W mowie potocznej używają wyrazu „wyznaczać” w sposób niejednostajny i niekonsekwentny. Ponieważ w dalszym wykładzie wypadnie nam nieraz posługiwać się tym terminem, musimy umówić się raz na zawsze, co on dla nas oznaczać będzie.

Jeżeli mamy dwa rodzaje przedmiotów A i B i jeżeli każdemu przedmiotowi A odpowiada jeden i tylko jeden przedmiot B , wówczas powiadam, że przedmiot B jest wyznaczony przez A . Tak więc wyraz „wyznaczać” będzie zawsze wyrażać dla nas d w i e p r a w d y: 1-o każdemu przedmiotowi A odpowiada jakiś przedmiot B ; 2-o każdemu przedmiotowi A odpowiada jeden tylko przedmiot B .

Wniosek. *Dwie proste mogą mieć co najwyżej jeden spólny punkt*, gdyby bowiem miały dwa punkty wspólne, musiałyby zlewać się w jedną prostą.

§ 3. **Pewnik Ib.** *Prosta i punkt nie leżący na niej wyznaczają płaszczyznę*. Symbolem „płaszczyzna (a, C)” oznaczać będziemy płaszczyznę, wyznaczoną przez prostą a i przez punkt C , nieleżący na tej prostej.

Ten sam pewnik możemy wyrazić inaczej:

trzy punkty nie leżące na jednej prostej wyznaczają płaszczyznę.

Istotnie, niech będą dane trzy punkty A, B, C , nie leżące na jednej prostej. Pierwsze dwa punkty wyznaczają prostą AB , punkt C na niej nie leży, a więc musi razem z prostą AB wyznaczać płaszczyznę.

Możemy wreszcie temu samemu pewnikowi nadać postać następującą:

dwie przecinające się proste wyznaczają płaszczyznę.

Jeżeli bowiem proste a, b przecinają się w punkcie B , wówczas na prostej b wystarczy obrać punkt C różny od B , a będziemy mieli prostą a i punkt C nie leżący na niej, które wyznaczają płaszczyznę (a, C).

Pewnik Ic. *Prosta, łącząca dwa dowolne punkty płaszczyzny, leży na tej płaszczyźnie.*

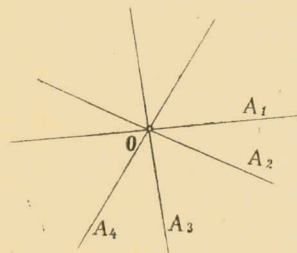
Fakt, że prosta a leży na płaszczyźnie α , wyrażamy również słowami: płaszczyzna α przechodzi przez prostą a , albo została przesunięta przez prostą a .

Własności prostej.

§ 4. Wyobraźmy sobie, że na dowolnej płaszczyźnie obraliśmy punkty O i A_1 . Prostą OA_1 oznaczmy przez a_1 i obierzmy w tej samej płaszczyźnie jakikolwiek punkt A_2 , nie leżący na

Jeżeli np. w pewnej klasie ponumerowaliśmy wszystkich uczniów, możemy powiedzieć, że numer wyznacza ucznia, gdyż 1-o każdemu numerowi odpowiada jakiś uczeń, 2-o) każdemu numerowi odpowiada tylko jeden uczeń. Jeżeli natomiast ponumerowaliśmy nie uczniów, lecz ławki, i jeżeli na każdej ławce siedzi po dwu lub więcej uczniów, wówczas możemy wprawdzie powiedzieć, że numer wyznacza ławkę (dlaczego?), ale nie mamy prawa powiedzieć, że numer wyznacza ucznia, gdyż każdemu numerowi odpowiada teraz grupa uczniów, nie zaś jeden tylko uczeń.

prostej a_1 . Punkty O i A_2 wyznaczają nową prostą a_2 . Obie-
rając w tej samej płaszczyźnie punkt A_3 , nie leżący ani na a_1 ,
ani na a_2 , otrzymamy trzecią prostą OA_3 czyli a_3 i t. d. Rzecz
jasna, że możemy otrzymać dowolną ilość
prostych, przechodzących przez punkt
 O i leżących w jednej płaszczyźnie
(rys. 1.)



Rys. 1.

Określenie. Zbiór wszystkich pro-
stych, przechodzących przez jeden
punkt i leżących w jednej płaszczyź-
nie, nazywamy *pekłem prostych*. Punkt
przecięcia się tych prostych nazywa-
my *wierzchołkiem pęku*.

W powyższym przykładzie punkt O jest wierzchołkiem
pęku.

§ 5. Wyobraźmy sobie, że obraliśmy na prostej dowolną
ilość punktów $A, B, C, \dots$ (rys. 2) i że jakieś ciało porusza
się po tej prostej. Doświadczenie powiada nam, że ciało
może przebiegać te punkty w porządku $A, B, C, \dots$ albo też
w porządku odwrotnym $\dots C, B, A$. To spo-
strzeżenie prowadzi do rozróżnienia na pro-
stej d w ó c h z w r ó t ó w w p r o s t s o b i e p r e c i w n y c h .

§ 6. **Pewnik IIa.** Każdy punkt prostej dzieli ją na dwie
części (zwane półprostymi), z których każda zawiera dowolną
ilość punktów.

Np. na rys. 2 punkt B dzieli prostą na dwie półproste; na
jednej z tych półprostych leży punkt A , na drugiej punkt C .

Dwie półproste, o których mowa w naszym pewniku, po-
siadają tylko jeden wspólny punkt, który nazywamy ich *po-
czątkiem*. O każdej z tych półprostych mówimy, że jest *prze-
dłużeniem* drugiej.

§ 6. **Określenie.** Odcinkiem nazywamy część prostej, za-
wartą między dwoma jej punktami. Punkty te nazywają się *koń-
cami odcinka*.

Np. na rys. 2 mamy odcinek AB , którego końcami są pun-
kty A i B .

Każdy inny punkt odcinka nazywa się *wewnętrznym*.

Określenie. Jeżeli na tej samej prostej mamy dwa lub wię-

cej odcinków, przyczem każdy z nich ma z następnym jeden
wspólny koniec, a nie ma żadnych innych punktów wspólnych, wów-
czas odcinki te nazywamy *kolejnymi*.

Na rys. 2 odcinki AB i BC są kolejne.

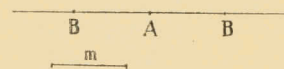
§ 7. **Określenie.** Jeżeli mamy dwa kolejne odcinki AB, BC ,
(rys. 2), wówczas odcinek AC nazywać będziemy ich *sumą* i będzie-
my pisali

$$AB + BC = AC.$$

§ 8. Każde dwa odcinki są albo **równe** sobie, albo **nieró-
wne**. Chcąc zaznaczyć, że odcinki MN, PR są sobie równe, pi-
szemy

$$MN = PR \text{ lub też } PR = MN.$$

Pewnik IIIa. Jeżeli na prostej mamy dany punkt A , wów-
czas po każdej stronie tego punktu istnieje jeden i tylko jeden
taki punkt B , że odcinek AB równa się pewnemu z góry zadanemu
odcinkowi m (rys. 3).



Rys. 3.

§ 9. Chcąc dodawać i odejmować
odcinki według tych samych praw, które rządzą dodawaniem i odejmowaniem
liczb, musimy ustalić szereg następują-
cych zasad i określić (§§ 9—12)

§ 9. **Pewnik IIIb.** O ile nie uwzględniamy zwrotu odcinka,
możemy powiedzieć, że

$$AB = BA.$$

Pewnik IIIc. Dwa odcinki równe trzeciemu są sobie równe.

§ 10. Pojęcie sumy możemy rociągnąć na dowolną liczbę
odcinków, nawet niekolejnych. Jeżeli mianowicie mamy odcin-
ki niekolejne, $a, b, c, \dots k$, wówczas sumą ich $a + b + c + \dots + k$
nazywać będziemy sumę odpowiednio równych im odcinków
kolejnych $a' + b' + c' \dots + k'$.

Pewnik IIId. Jeżeli mamy odpowiednio równe sobie odcinki

$$a = a', \quad b = b'$$

wówczas musi być również

$$a + b = a' + b'.$$

Innymi słowy: *sumy równych odcinków są sobie równe.*

Twierdzenie. Jeżeli przez a , b oznaczymy dowolne odcinki, będziemy zawsze mieli

$$a + b = b + a$$

Twierdzenie. Jeżeli a , b , c są dowolnymi odcinkami, wówczas

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

§ 11. Określenie. Jeżeli a , b , c są trzema odcinkami, przyczym

$$a + b = c,$$

wówczas odcinek c nazywamy większym od każdego z odcinków a , b , te zaś nazywamy mniejszymi i piszemy

$$a < c, b < c, c > a, c > b$$

Z tego określenia i z pewników IIIc i III d wynika, że

1^o) jeżeli $a > b$, $b \geq c$, wówczas $a > c$;

2^o) jeżeli $a > b$, $c = d$, wówczas $a + c > b + d$.

§ 12. Określenie. Jeżeli a , b , c są trzema odcinkami, przyczym

$$a + b = c,$$

wówczas a nazywamy różnicą odcinków c i b , odcinek zaś b nazywamy różnicą odcinków c i a i piszemy

$$a = c - b$$

$$b = c - a.$$

Z tego określenia wynika, że

1^o jeżeli $a = a'$, $b = b'$ oraz $a > b$,

wówczas $a - b = a' - b'$;

2^o jeżeli $a > b$ oraz $a' \leq b'$, wówczas musi być

$$a - a' > b - b',$$

oczywiście w założeniu, że odejmowanie daje się wykonać.

§ 13. Określenie. Sumę n odcinków równych odcinkowi a nazywamy n -tą wielokrotną odcinka a i oznaczamy symbolem

$$n a.$$

Odcinek a nazywamy n -tą podwielokrotną albo n -tą częścią odcinka $n a$.

Chcąc oznaczyć, że odcinek b jest n -tą częścią odcinka c , piszemy

$$b = \frac{1}{n} c \quad \text{lub} \quad b = \frac{c}{n}$$

Pewnik VIa (zwany pewnikiem Archimedesza dla odcinków). Jeżeli mamy dwa nierówne odcinki a , b , przyczym $a < b$, wówczas możemy znaleźć tak wielką liczbę n , że $n a > b$.

§ 14. Jeżeli mamy dwa lub więcej odcinków, z których każdy poprzedni ma wspólny koniec z następnym, i jeżeli odcinki te nie leżą na jednej prostej, wówczas tworzą one *linję łamaną*.

O pojęciu kąta.

§ 15. Pewnik IIb. Każda prosta a , leżąca na płaszczyźnie α , dzieli ją na dwie części (na dwa obszary) zwane półpłaszczyznami i zawierające każda dowolną ilość punktów.

Wyraz „dzieli” należy rozumieć w następujący sposób:
1-o każdy punkt płaszczyzny α albo leży na prostej a , albo też należy do jednej z dwu części płaszczyzny, o których mowa w pewniku;

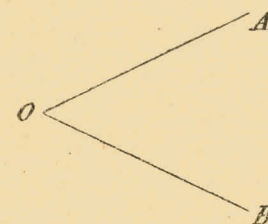
2-o jeżeli punkty A , B należą do jednej części płaszczyzny, wówczas odcinek AB nie przecina prostej a ;

3-o jeżeli punkty A , B należą do dwu różnych części płaszczyzny, wówczas odcinek AB przecina prostą a .

O prostej a mówimy, że *oddziela* te dwie części płaszczyzny, że stanowi ich *spólną granicę*.

Zamiast mówić: „punkty A , B należą do jednej części (lub: do dwu różnych części) płaszczyzny”, będziemy nieraz mówili: „punkty A , B leżą po jednej stronie (lub: po dwu stronach) prostej a .”

§ 16. Dwie półproste, mające spólny początek, dzielą płaszczyznę na dwa obszary, z których każdy nazywa się *kątem płaskim* albo krótko: *kątem*. Obie półproste nazywamy *ramionami* kąta, spólny ich początek nazywa się *wierzchołkiem* kąta. Na rys. 3. OA , OB są ramionami, O jest wierzchołkiem kąta.



Rys. 3.

Kąt oznaczamy zazwyczaj trzema literami, przyczym w środku wymieniamy literę, którą oznaczyliśmy wierzchołek kąta. Np. kąt przedstawiony na rys. 3 oznaczamy symbolem $\sphericalangle AOB$ lub $\sphericalangle BOA$.

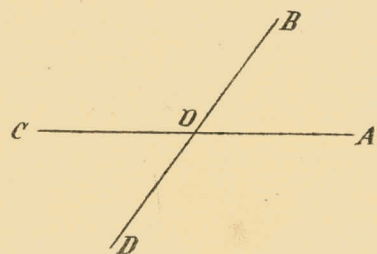
Jeżeli półproste, które są ramionami kąta, oznaczyliśmy małymi literami, wówczas kąt możemy oznaczyć innym, prostszym symbolem. Będziemy np. pisali $\sphericalangle(a, b)$, mając na myśli kąt między dwiema półprostymi a, b .

Czasem, o ile nie będziemy się obawiali nieporozumień, będziemy oznaczali kąty numerami; będziemy tedy pisali $\sphericalangle 1, \sphericalangle 2$ (t. j. kąt pierwszy, kąt drugi i t. d.) Czasem tu używamy liter greckich, np. $\sphericalangle \alpha$.

§ 17. Jeżeli dwie proste przecinają się, powstają różne pary kątów, którym nadajemy specjalne nazwy.

Określenia. Jeżeli ramiona jednego kąta są przedłużeniem ramion drugiego, wówczas dwa te kąty nazywamy wierzchołkowymi.

Jeżeli dwa kąty mają wspólne ramie, drugie zaś dwa ramiona tworzą jedną prostą, wówczas kąty nazywamy przyległymi.



Rys. 4.

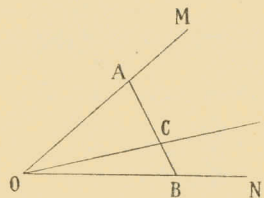
Np. na rys. 4 kąty $\sphericalangle AOB, \sphericalangle COD$ są wierzchołkowe, kąty zaś $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC$ są przyległe.

Wyliczyć wszystkie znajdujące się na tym rysunku kąty wierzchołkowe i przyległe.

§ 18. Na dwu ramionach kąta $\sphericalangle MON$ obierzmy dowolne dwa punkty

A, B . Łącząc wierzchołek O (rys. 5) z jakimkolwiek punktem C , należącym do odcinka AB , otrzymujemy półprostą OC ,

o której powiadamy, że leży wewnątrz kąta $\sphericalangle MON$. O każdym punkcie tej półprostej (z wyjątkiem punktu O) powiadamy również, że leży wewnątrz kąta $\sphericalangle MON$.



Rys. 5.

§ 19. Odpowiednio do dwu zwrotów prostej (lub odcinka) możemy odróżniać dwa zwroty kąta. Pojęcie to daje się uzmysłwić w następujący sposób: wyobraźmy sobie, że półprostą OM obracamy dookoła początku O ; zakreśla ona kąt, przyczym punkt jej przecięcia z prostą AB porusza się po tej prostej

albo od A ku B , albo od B ku A . Odpowiednio do tego powiadamy, że kąty $\sphericalangle MON$ i $\sphericalangle NOM$ mają zwroty przeciwne.

§ 20. Określenia. Kątami kolejnymi nazywamy takie kąty o wspólnym wierzchołku, z których każdy ma z następnym wspólne ramie i nie ma żadnych więcej punktów wspólnych.

Np. na rys. 4 kąty $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD$ są kolejne. Sumą dwu lub więcej kątów kolejnych nazywamy zbiór wszystkich punktów, leżących wewnątrz tych kątów.

§ 21. Jeżeli sumę kątów kolejnych chcemy zawsze uważać za kąt, musimy wprowadzić pojęcie kąta półpełnego i pełnego.

Określenia. Półpełnym nazywamy kąt, którego oba ramiona tworzą jedną prostą. Np. na rys. 4 suma kątów $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC$ tworzy kąt półpełny $\sphericalangle AOC$, którego ramiona OA i OC leżą na jednej prostej. Każda prosta i punkt na niej wyznaczają na płaszczyźnie dwa kąty półpełne, leżące po dwu stronach tej prostej; sumę takich dwu kątów półpełnych nazywamy kątem pełnym.

Np. na rys. 4 suma kątów kolejnych

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOA$$

tworzy kąt pełny. Kąt ten jest zarazem sumą dwu kątów półpełnych leżących po dwu stronach prostej AC .

Wniosek. Z określeń kątów półpełnych i kątów przyległych wynika, że suma dwu kątów przyległych równa się kątowi półpełnemu.

§ 22. Każde dwa kąty są albo równe sobie, albo nierówne. Chcąc zaznaczyć, że kąty $\sphericalangle AOB, \sphericalangle CMD$ równają się sobie, piszemy

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle CMD \text{ albo też } \sphericalangle CMD = \sphericalangle AOB.$$

Pewnik IIIa. Po każdej stronie danej półprostej istnieje jedna i tylko jedna półprosta, tworząca z nią kąt równy danemu.

§ 23. Określenie. Jeżeli mamy dwa równe sobie kąty przyległe, wówczas każdy z nich nazywamy kątem prostym.

Ponieważ suma obu kątów przyległych równa się kątowi półpełnemu, zatem określenie nasze można sformułować inaczej; kątem prostym nazywamy połowę kąta półpełnego. Oczywiście zakładamy przy tym, że istnieje jeden tylko sposób dzielenia kąta półpełnego na połowy.

Kąt prosty będziemy niekiedy oznaczali literą grecką δ . Wobec tego kąt półpełny możnaby oznaczyć symbolem 2δ .

Np. mając na myśli kąty na rys. 4, możnaby napisać równość następującą:

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 2\delta.$$

Pewnik IIIe. Wszystkie kąty proste są sobie równe.

O dwu kątach, których suma równa się kątowemu prostemu, mówimy, że dopełniają się do kąta prostego. Jeżeli suma kątów równa się kątowi półpełnemu, mówimy, że kąty spełniają się. Jeżeli proste AA' , BB' przecinają się pod kątem prostym, mówimy, że są do siebie prostopadłe i piszemy $AA' \perp BB'$.

§ 24. Chcąc dodawać i odejmować kąty według tych samych praw, które rządzą dodawaniem i odejmowaniem odcinków, tworzymy szereg następujących określeń i pewników.

Pewnik IIIb'. O ile nie uwzględniamy zwrotu kąta, wówczas mamy zawsze równość

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOA.$$

Pewnik IIIc'. Dwa kąty równe trzeciemu równają się sobie

§ 25. Określenie. Sumą kątów niekolejnych nazywamy sumę odpowiednio równych im kątów kolejnych.

Pewnik IIId'. Sumy równych kątów są sobie równe. Innymi słowy: jeżeli mamy $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha'$, $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta'$, wówczas musi być

$$\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta = \sphericalangle \alpha' + \sphericalangle \beta'.$$

§ 26. Jeżeli mamy $\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma$, wówczas powiadaemy, że kąt $\sphericalangle \gamma$ jest większy od każdego z dwu kątów $\sphericalangle \alpha$, $\sphericalangle \beta$, te zaś nazywamy mniejszymi od kąta $\sphericalangle \gamma$ i piszemy

$$\sphericalangle \alpha < \sphericalangle \gamma \text{ lub } \sphericalangle \gamma > \sphericalangle \alpha \text{ i t. d.}$$

§ 27. Określenie. Jeżeli mamy

$$\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma,$$

wówczas kąt $\sphericalangle \alpha$ nazywamy różnicą kątów $\sphericalangle \gamma$ i $\sphericalangle \beta$, kąt zaś $\sphericalangle \beta$ nazywamy różnicą kątów $\sphericalangle \gamma$ i $\sphericalangle \alpha$ i piszemy

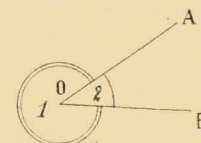
$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \gamma - \sphericalangle \beta$$

$$\sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma - \sphericalangle \alpha$$

§ 28. Określenie. Kąt większy od półpełnego nazywamy wklęsłym, kąt mniejszy od półpełnego nazywamy wypukłym.

Mówiliśmy w § 16, że dwie półproste o wspólnym początku

dzielią płaszczyznę na dwa obszary, z których każdy nazywamy kątem. Otóż jeden z tych kątów jest zwykle wklęsły, drugi wypukły. Np. na rys. 6 półproste OA , OB wyznaczają kąt wklęsły, opatrzony numerem 1, i kąt wypukły, opatrzony na rysunku numerem 2.



Rys. 6.

§ 29. Określenie. Sumę n kątów równych kątowi $\sphericalangle \alpha$ nazywamy n -tą wielokrotnością kąta $\sphericalangle \alpha$ i oznaczamy symbolem

$$n \sphericalangle \alpha.$$

Kąt $\sphericalangle \alpha$ nazywamy n -tą podwielokrotną albo n -tą częścią kąta $n \sphericalangle \alpha$.

Pewnik VIb. (pewnik Archimidesa dla kątów). Jeżeli mamy dane dwa kąty $\sphericalangle \alpha$ i $\sphericalangle \beta$, przyczym $\sphericalangle \alpha > \sphericalangle \beta$, wówczas możemy znaleźć tak wielką liczbę n , iż

$$n \sphericalangle \beta > \sphericalangle \alpha.$$

§ 30. Twierdzenie. Kąty wierzchołkowe są sobie równe.

Istotnie, mamy (rys. 4)

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 2\delta$$

$$\sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = 2\delta$$

$$\text{zatem } \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD$$

Stąd zaś wynika, że $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$.

Ćwiczenia I. 1. Na prostej obieramy pięć dowolnych punktów A, B, C, D, E ; przedstawić odcinek AD jako sumę dwóch odcinków; jako sumę trzech odcinków; jako różnicę dwóch odcinków.

2. Na prostej obieramy sześć dowolnych punktów A, B, C, D, E, F ; przedstawić na wszelkie możliwe sposoby odcinek BE jako sumę dwu odcinków; jako różnicę dwu odcinków.

3. W poprzednim zadaniu odcinek BD przedstawić różnymi sposobami w postaci sumy algebraicznej odcinków $m - n - p$, w postaci sumy algebraicznej odcinków $m + n - p$.

4. Z punktu O prowadzimy półproste OA, OB, OC, OD, OE, OF .

1-o odczytać wszystkie kąty kolejne;

2-o kąt $\sphericalangle BOE$ przedstawić jako sumę dwu kątów; jako sumę trzech kątów; jako różnicę dwu kątów;

3-o kąt $\sphericalangle BOD$ przedstawić rozmaitymi sposobami w postaci sumy algebraicznej kątów $\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta - \sphericalangle \gamma$, lub też $\sphericalangle \alpha - \sphericalangle \beta - \sphericalangle \gamma$.

5. Wykreślić dwa kąty przyległe $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle BOC$. Jak wielki jest każdy z nich, jeżeli pierwszy jest 3 razy mniejszy od drugiego?

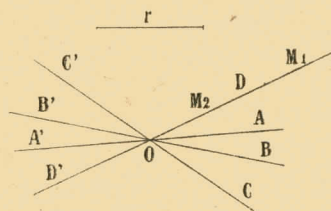
6. Z dowolnego punktu O prowadzimy półproste OA , OB , OC , OD , OE ; kąty kolejne $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$, $\angle EOA$ mają się do siebie tak, jak $1 : 2 : 3 : 4 : 5$; jak wielki jest każdy z nich?

7. Na rysunku, odnoszącym się do poprzedniego zadania, wyznacz wszystkie możliwe kąty i obliczyć wielkość każdego z nich.

8. Proste AB , CD przecinają się w punkcie O , przyczem kąty $\angle AOC$, $\angle COB$ mają się do siebie, jak $1 : 2$; obliczyć wszystkie kąty, jakie powstały na rysunku.

Koło i okrąg koła.

§ 31. Wyobraźmy sobie, że mamy dany pęk prostych, którego wierzchołek oznaczmy literą O . Niech również będzie dany dowolny odcinek r . Wiemy, że na każdej prostej, należącej do naszego pęku, możemy odłożyć, poczynając od punktu O ,



Rys. 7.

po dwa odcinki równe odcinkowi r (np. OA , OA' lub OB , OB' na rys. 7). Dwa takie odcinki leżą po przeciwnych stronach punktu O [Pewnik IIIa]. Ponieważ w pęku mamy nieskończenie wiele prostych, zatem otrzymujemy nieskończenie

wiele takich odcinków. Końce ich A , A' , B , B' , C , C' ... tworzą figurę, którą nazywamy okręgiem koła. Punkt O nazywamy środkiem koła, wszystkie zaś równe odcinki $OA = OA' = OB = OB' = OC = \dots$ nazywamy promieniami koła.

Mając dany dowolny punkt M płaszczyzny, możemy go połączyć z punktem O , przez co otrzymujemy prostą, należącą do naszego pęku. Na tej prostej istnieją dwa i tylko dwa punkty — powiedzmy D i D' — takie, że

$$OD = OD' = r.$$

Możliwe są trzy przypadki:

punkt M zlewa się z D lub z D' , a więc leży na okręgu koła; punkt M jest punktem wewnętrznym odcinka OD lub odcinka OD' , czyli odcinek OM jest mniejszy od promienia r ; powiadamy wówczas, że punkt M leży wewnątrz okręgu lub wewnątrz koła;

punkt M leży zewnątrz odcinka DD' ; odcinek OM jest wówczas większy od promienia, o punkcie zaś M powiadamy, że leży zewnątrz okręgu lub zewnątrz koła.

Jak widzimy, mając dane koło, możemy twierdzić, że każdy punkt płaszczyzny leży albo na jego okręgu, albo wewnątrz, albo wreszcie zewnątrz okręgu.

Mamy tedy następujące określenia i płynące z nich wnioski:

Określenia. Okręgiem koła nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, równoodległych od jednego punktu, zwanego środkiem koła.

Promieniem koła nazywamy odcinek, łączący środek koła z dowolnym punktem okręgu.

Cięciwą nazywamy odcinek, łączący dwa punkty okręgu.

Średnicą koła nazywamy odcinek, łączący dwa punkty okręgu i przechodzący przez środek koła.

Każdy punkt płaszczyzny, którego odległość od środka koła jest mniejsza od promienia, nazywa się punktem wewnętrznym koła, jeżeli zaś odległość jego od środka jest większa od promienia, wówczas punkt ten nazywamy zewnętrznym względem koła.

Kołem nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, leżących bądź na okręgu, bądź wewnątrz okręgu.

Łukiem koła nazywamy każdą część okręgu, zawartą między dwoma jego punktami.

Łuk, którego punkty końcowe są zarazem końcami średnicy, nazywa się półokręgiem.

Punkt, poruszający się po płaszczyźnie w ten sposób, że odległość jego od pewnego innego, nieruchomego punktu pozostaje stała, kreśli okrąg koła, którego środkiem jest ów punkt nieruchomy. Na tym spostrzeżeniu opiera się zastosowanie cyrkla do kreślenia kół.

Wnioski. 1. Koło jest wyznaczone, jeżeli znamy jego środek i promień.

Innymi słowy: z danego środka danym promieniem możemy zawsze wykreślić koło, ale tylko jedno.

2. Wszystkie promienie tego samego koła są sobie równe, a więc i wszystkie jego średnice równają się sobie.

3. Każda prosta, przechodząca przez środek koła, ma z okręgiem dwa i tylko dwa punkty wspólne.

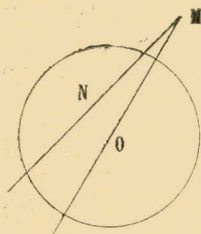
Det.

§ 32. W dalszym ciągu będziemy się często posługiwali symbolem $(O)r$ w celu oznaczenia koła, zakreślonego ze środka O promieniem r . Tak samo symbol $(O)A$ oznaczać będzie koło, zakreślone ze środka O i przechodzące przez punkt A czyli mające odcinek OA za promień.

§ 33. Wyliczyliśmy kilka cech charakterystycznych, które przypisujemy figurom, zwany w życiu codziennym kołami lub okręgami kół. Nie wymieniliśmy jednak dotąd dwóch z pośród najważniejszych cech. Jeżeli np. zakreślimy cyrklem koło, wówczas nie ulega dla nas żadnej wątpliwości, że linja, którą widzimy na papierze, jest ciągła (czyli nie posiada przerw) i że dzieli ona płaszczyznę na dwie części: wewnętrzną i zewnętrzną, których spólną granicę stanowi okrąg koła.*)

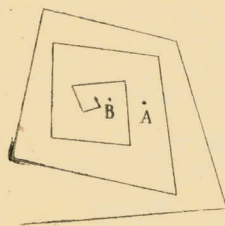
W dotychczasowych rozważaniach nie uwzględniliśmy tych dwu cech okręgu i z naszych określeń nie wynika bynajmniej, żeby na okręgu jakiegoś koła nie miała istnieć jedna lub więcej przerw. Jeśli więc mamy dane koło O , punkt zewnętrzny M i punkt wewnętrzny N , nie leżący na prostej OM , wówczas wiemy wprowadzić, że prosta OM przecina okrąg w dwóch punktach, nie możemy jednak mieć pewności, czy prosta MN spotyka okrąg koła, gdyż mogłaby ona natrafiać na przerwy w okręgu, o ile takie przerwy istnieją.

Chcąc tedy, żeby nasze określenia od-



Rys. 9.

*) Rzecz jasna, że granica nie może posiadać przerw, nie wolno jednak twierdzić, że każda linja ciągła, choćby nieograniczona, stanowi może granicę dwóch obszarów płaskich, że może dzielić płaszczyznę na dwie części. Np. na rys. 8 mamy linję łamaną, którą możemy przedłużać nieograniczenie, z tym tylko zastrzeżeniem, że linja ta nigdzie samą siebie nie przetnie; otóż dostrzegamy odrazu, że z każdego punktu płaszczyzny możemy przejść do każdego innego (np. z A do B), nie przecinając nigdzie naszej łamanej, a więc linja ta nie może oddzielić, odgraniczyć żadnej części płaszczyzny. Widzimy tedy, że ciągłość linji a zdolność dzielenia płaszczyzny na części są to istotnie dwie różne cechy.



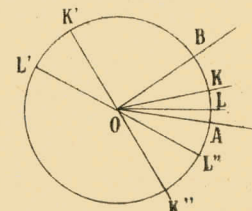
Rys. 8.

powiadały temu, co w doświadczeniu codziennym nazywamy kołem, musimy uzupełnić je za pomocą dwóch następujących pewników:

Pewnik VIc. Jeżeli punkt wewnętrzny koła połączymy z punktem zewnętrznym za pomocą odcinka prostej, wówczas odcinek ten przetnie okrąg koła w jednym i tylko w jednym punkcie.

Pewnik VI d. Jeżeli punkt wewnętrzny koła połączymy z punktem zewnętrznym za pomocą łuku jakiegokolwiek innego koła, wówczas łuk ten przetnie okrąg dany w jednym i tylko w jednym punkcie.

§ 34. Przypuśćmy, że na okręgu koła O mamy dane dowolne dwa punkty A, B . Łącząc je z punktem O , otrzymujemy kąt $\angle AOB$. W punkcie O , istnieją zarówno półproste, leżące wewnątrz kąta $\angle AOB$, jak i półproste, leżące zewnątrz tego kąta. Wobec tego na okręgu naszego koła mamy zarówno punkty, leżące wewnątrz kąta $\angle AOB$ (np. punkty K, L na rys. 10), jaki takie, które leżą zewnątrz tego kąta (np. punkty K', K'', L', L'').



Rys. 10.

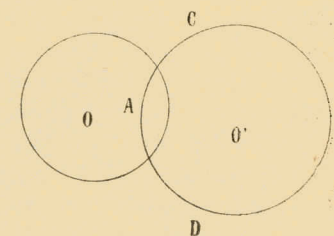
Mamy tedy prawo twierdzić, że każdedwa punkty A, B okręgu dzielą ten okrąg na dwa łuki, które nie mają żadnych punktów spólnych prócz swych końców A, B .

Uwaga. Wynika stąd, że powiedzenie: „łuk AB danego koła” jest dwuznaczne, gdyż mamy dwa łuki, których końcami są punkty A, B , że więc łuk należy oznaczać trzema literami, wymieniając dwa jego końce i jakikolwiek trzeci punkt, na tym łuku leżący, np. „łuk AKB ” lub „łuk $AK'B$ ”.

W celu oznaczenia łuku AKB będziemy się czasem posługiwali symbolem $\overset{\frown}{AKB}$.

§ 35. **Twierdzenie.** Jeżeli na płaszczyźnie mamy dane dwa okręgi, przyczym jeden z nich przechodzi przez punkt wewnętrzny i przez punkt zewnętrzny drugiego okręgu, wówczas okręgi te mają dwa i tylko dwa punkty spólne.

Niech będą dane dwa okręgi O i O' . Przypuśćmy, że punkt A okręgu O' leży wewnątrz, punkt zaś B tegoż okręgu leży zewnątrz



Rys. 11.

koła O ; powiadam, że okręgi O i O' mają dwa i tylko dwa punkty wspólne.

Istotnie, na okręgu O' punkty A i B wyznaczają dwa łuki (ACB i ADB), z których każdy łączy punkt wewnętrzny A z punktem zewnętrznym B , a więc musi mieć z okręgiem O jeden i tylko jeden punkt wspólny [Pewnik VI d].

§ 36. Określenie. *Równymi kołami (lub okręgami) nazywamy koła (lub okręgi), zakreślone równymi promieniami.*

Z powyższego określenia i z wniosku (1) w § 31 (str. 19) wynika, że z każdego punktu płaszczyzny, jako ze środka, możemy zakreślić koło równe danemu.

Ćwiczenia II. 1. Danym promieniem r wykreślić okrąg koła, przechodzący przez dany punkt A . Ile takich kół można wykreślić?

2. Jaką linię tworzą środki wszystkich kół, o których mowa w poprzednim ćwiczeniu? Wykreślić tę linię, obierając punkt A dowolnie w płaszczyźnie rysunku i kładąc $r = 5$ cm.

3. Mając dany okrąg $(O)r$ i punkt A na nim, wykreślić z tego punktu, jako ze środka, okrąg koła, przechodzący przez punkt O . Dowieść, że okręgi $(O)r$ i $(A)O$ muszą mieć dwa punkty wspólne.

4. Oznaczmy przez M_1, M_2 punkty wspólne kół $(O)r$ i $(A)O$ w poprzednim ćwiczeniu i połączmy punkty O, A, M_1, M_2 na wszelkie możliwe sposoby za pomocą odcinków prostych; czy wśród tych odcinków istnieją równe sobie, i które mianowicie?

5. Uogólnić ćwiczenie 3-cie w następujący sposób:

Mamy dane koło $(O)r$ i punkt A na jego okręgu; najpierw kreślimy okrąg $(A)O$ czyli $(A)r$, o którym już wiemy, że ma on dwa punkty wspólne z okręgiem danym; następnie kreślimy z punktu A okręgi coraz większymi promieniami. Do jakiej granicy możemy zwiększać te promienie, jeżeli mamy mieć pewność, że każdy wykreślony przez nas okrąg ma dwa punkty wspólne z okręgiem danym $(O)r$?

Jeżeli, przeciwnie, z punktu A kreślić będziemy okręgi coraz mniejszym promieniem, tak jednak, by miały one po dwa punkty wspólne z okręgiem $(O)r$, — czy możemy zmniejszać promień nieograniczenie?

6. Odpowiedzieć na takie same dwa pytania, jak w poprzednim ćwiczeniu, zakładając jednak, że punkt A leży nie na okręgu $(O)r$, lecz wewnątrz tego okręgu.

7. Po okręgu koła (materjalnego) nieruchomego $(O)r$ toczy się drugie koło, którego promień równa się r' . Jaką linię zakreśla środek toczącego się koła: a) jeżeli toczy się ono po stronie zewnętrznej okręgu $(O)r$? b) jeżeli toczy się po stronie wewnętrznej tego okręgu?

[Wykonać trzy rysunki, biorąc we wszystkich trzech $r = 4\frac{1}{2}$ cm. Na pierwszych dwóch rysunkach bierzemy $r' = 1,7$ cm., przyczym pierwszy rysunek powinien ilustrować przypadek (a), drugi rysunek — przypadek (b). Na trzecim rysunku bierzemy $r' = 6\frac{1}{2}$ cm. i zakładamy, że koło nieruchome $(O)r$ leży wewnątrz koła ruchomego. Na każdym z tych trzech rysunków należy wykreślić toczące się koło przynajmniej w kilku różnych położeniach i zaznaczyć wyraźnie linię, którą zakreśla jego środek].

KSIĘGA I.

O równości i symetrii figur płaskich.

ROZDZIAŁ I.

Pojęcie o trójkacie. O równości trójkątów.

§ 37. Niech będą dane trzy dowolne punkty A , B , C , byle nie leżące na jednej prostej. Wyznaczają one trzy odcinki AB , BC , CA i trzy kąty $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$. Trzy te odcinki tworzą linię łamaną zamkniętą, która dzieli płaszczyznę na dwa obszary: wewnętrzny i zewnętrzny.

Określenie. Trójkątem ABC nazywamy figurę, utworzoną przez wszystkie punkty płaszczyzny, które leżą czy to na łamanej zamkniętej ABC , czy wewnątrz tej łamanej.

Punkty A , B , C nazywamy *wierzchołkami trójkąta*.

Odcinki AB , BC , CA są to *boki trójkąta*.

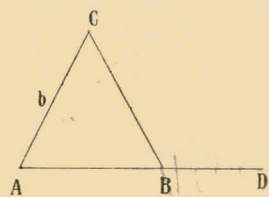
Łamana zamknięta ABC stanowi *kontur trójkąta*.

Sumę trzech boków $AB + BC + CA$ nazywamy *obwodem trójkąta*.

Kąty $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$

są to *kąty wewnętrzne trójkąta*; przyległe do nich kąty nazywamy *zewnętrznymi*.

Boki i kąty wewnętrzne trójkąta nazywamy niekiedy jego *elementami*.



Rys. 12.

Często, mając na myśli kąt wewnętrzny trójkąta, mówimy po prostu: „kąt trójkąta”; taki sposób mówienia dopuszczalny jest tylko wtedy, gdy nie może wywołać nieporozumienia.

Wierzchołek, który nie jest końcem danego boku trójkąta, nazywamy *przeciwległym temu bokowi*. Np. o wierzchołku A powiadamy, że jest przeciwległy bokowi BC .

Trójkąt ABC będziemy często oznaczali symbolem $\triangle ABC$.

Każdy bok trójkąta możemy oznaczyć jedną małą literą, obierając w tym celu taką samą literę, jaką oznaczyliśmy przeciwległy wierzchołek. Np. na rys. 12 bok CA możemy oznaczyć literą b , gdyż przeciwległy temu bokowi wierzchołek oznaczyliśmy literą B .

§ 38. Pojęcie trójkąta daje się z łatwością uogólnić. Niech będą dane na płaszczyźnie n punktów $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Łącząc pierwszy punkt z drugim, drugi z trzecim, ... ostatni z pierwszym, otrzymamy linię łamaną zamkniętą.

Zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, leżących bądź na łamanej zamkniętej, bądź wewnątrz łamanej, nazywamy wielokątem (wielobokiem). Łamana stanowi *kontur wielokąta*.

Rozróżniamy dwa rodzaje wielokątów: wypukłe i wklęsłe.

Wielokąt nazywamy wypukłym, jeżeli żaden jego bok, ani przedłużenie żadnego boku nie przecina jego konturu, w przeciwnym zaś razie wielokąt nazywamy wklęsłym.

To samo dałoby się wyrazić innymi słowami: wielokąt wypukły leży po jednej stronie każdego swego boku. Śród wielokątów wklęsłych zasługują na uwagę wielokąty *związane*, t. j. takie, w których przecinają się dwa niesąsiednie boki.

W dalszym ciągu będzie zawsze mowa o wielokątach wypukłych, o ile nie uczynimy specjalnego zastrzeżenia.

Punkty $A_1, A_2, \dots, A_n$ nazywamy *wierzchołkami wielokąta*.

Kąty (wypukłe) $\sphericalangle A_n A_1 A_2$, $\sphericalangle A_1 A_2 A_3$, ..., $\sphericalangle A_{n-1} A_n A_1$ nazywamy *wewnętrznymi*, przyległe zaś kąty nazywamy *zewnętrznymi*.

Ćwiczenia III. 1. Rysujemy trójkąt ABC i na boku AC lub na przedłużeniu tego boku obieramy dowolny punkt D . Wymienić wszystkie trójkąty, wyznaczone przez punkty A , B , C , D .

Przypuśćmy, że punkt D obraliśmy nie na boku AC , lecz wewnątrz trójkąta ABC ; ile powstało przytym trójkątów i jakie mianowicie?

Z kolei obieramy punkt D zewnątrz trójkąta ABC , lecz nie na przedłużeniu boku; wymienić wszystkie trójkąty, wyznaczone przez punkty A, B, C, D .

2. Nie patrząc na rysunek, wymienić końce boku a w trójkącie ABC oraz kąt, przeciwny temu bokowi. Powtórzyć to samo z dwoma innymi bokami.

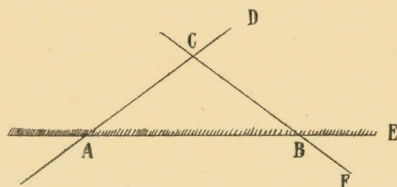
3. W trójkącie ABC przedłużyć wszystkie boki; ile powstało kątów zewnętrznych? czy niema wśród nich równych sobie?

4. Kąt wewnętrzny trójkąta możemy określić, jako kąt zawarty między dwoma bokami trójkąta. Czy można utworzyć analogiczne określenie dla kąta zewnętrznego?

5. Wykreślić trzy proste, przecinające się po dwie w punktach M, N, L . Wskazać kąt, zawarty między bokiem m a przedłużeniem boku n ; między bokiem n a przedłużeniem boku m ; między n a przedłużeniem boku l ; między przedłużeniami boków m, n . Czy ten ostatni kąt jest kątem zewnętrznym?

6. Na ile obszarów została podzielona płaszczyzna przez trzy proste m, n, l , o których mowa w poprzednim ćwiczeniu? Czy można wykreślić czwartą prostą, przecinającą dwa (i tylko dwa) z pośród tych obszarów? Jaka jest największa liczba obszarów, które ta prosta może przeciąć?

Kreślimy trzy proste, przecinające się po dwie w punktach A, B, C , nieleżących na jednej prostej. Każda z tych trzech prostych dzieli płaszczyznę na dwa obszary. Z dwóch



Rys. 13.

obszarów, wyznaczonych przez prostą AB , nazwijmy dodatnim ten, w którym leży punkt C (na rys. 13 obszar ten został zaznaczony kreskami), drugi zaś obszar nazwijmy ujemnym.

7. Wykreślić trzy proste, jak na rys. 13, i zaznaczyć kreskami obszary dodatnie, wyzna-

czone przez proste AB, BC, CA .

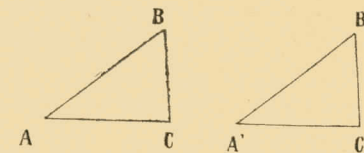
W jaki sposób określić można punkty wewnętrzne trójkąta ABC ? Jak określić punkty, należące do kątów zewnętrznych $\sphericalangle DCB, \sphericalangle ECB$? Punkty, należące do kąta $\sphericalangle EBF$?

8. Na rysunku, odpowiadającym ćwiczeniu 5-emu, znaleźć punkty, leżące wewnątrz dwóch kątów zewnętrznych i jednego wewnętrznego.

§ 39. Określenie. Dwa trójkąty nazywamy równymi, jeżeli boki i kąty jednego z nich równają się odpowiednim bokom i kątom drugiego, przyczym odpowiednimi kątami nazywamy te, które leżą naprzeciwko równych boków, o d p o-

wiednimi bokami te, które leżą naprzeciwko równych kątów.

Jeżeli np. trójkąty $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ (rys. 14) równają się sobie, wówczas muszą zachodzić następujące równości:



Rys. 14.

$$AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A' \\ \sphericalangle A = \sphericalangle A', \sphericalangle B = \sphericalangle B', \sphericalangle C = \sphericalangle C'$$

Równość dwóch trójkątów oznaczamy symbolem $\equiv$. Chcąc tedy zaznaczyć, że trójkąty $ABC, A'B'C'$ są sobie równe, piszemy

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Z określenia równości trójkątów wynika bezpośrednio, że dwa trójkąty równe trzeciemu są sobie równe.

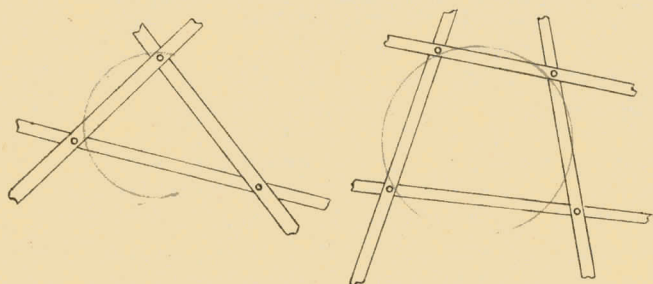
§ 40. Wiemy już, że gdy mowa o równości dwóch trójkątów, mamy właściwie na myśli sześć równości, z których trzy zachodzą między bokami, trzy zaś między kątami trójkątów. Zobaczymy jednak zaraz, że chcąc sprawdzić, czy dwa trójkąty są sobie równe, wystarczy stwierdzić, że zachodzą trzy równości odpowiednio dobrane z pośród powyższych sześciu. *) W ten sposób otrzymamy t. zw. cechy równości trójkątów czyli sposoby praktyczne poznawania tej równości.

Pierwszą z tych cech możemy oprzeć na następującym doświadczeniu. Weźmy siedem (lub więcej) pasków tektury dostatecznie sztywnej. Paski te połączymy za pomocą pluskiewek lub drucików tak, by dwa połączone z sobą paski mogły obracać się dookoła pluskiewki, jak na zawiasach. Z trzech pasków tworzymy trójkąt, z pozostałych zaś czworobok (lub wogóle wielobok), jak na rys. 15.

Spostrzegamy odrazu, że trójkąt jest sztywny, natomiast w czworoboku (lub w wieloboku) wszystkie boki swo-

*) Fakt ten wskazuje, że między bokami i kątami trójkąta istnieją jakieś związki, tak iż trzy odpowiednio dobrane elementy trójkąta wyznaczają pozostałe trzy jego elementy. Zobaczymy np., że kąty trójkąta są w zupełności wyznaczone, gdy znamy trzy jego boki.

bodnie poruszają się na zawiasach, tak, iż kształt tego czworoboku możemy dowolnie zmieniać. Widzimy tedy, że z trzech



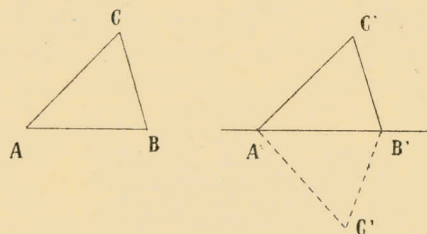
Rys. 15.

boków można utworzyć (zbudować) jeden tylko trójkąt i że kąty w nim są niezmiennie, natomiast z czterech boków możemy zbudować dowolnie wiele czworoboków.

Dochodzimy w ten sposób do następującego pewnika:

§ 41. Pewnik IIIf. (I cecha równości trójkątów). Jeżeli trzy boki jednego trójkąta równają się trzem bokom drugiego, wówczas i kąty jednego trójkąta równają się odpowiednim kątom drugiego, czyli trójkąty są sobie równe.

§ 42. Możemy również wypowiedzieć następujący oczywisty pewnik:



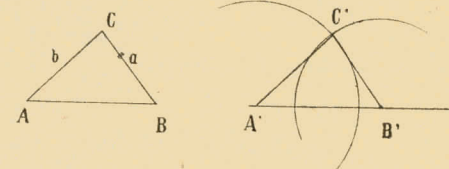
Rys. 16.

Pewnik IIIg. Jeżeli mamy dany trójkąt ABC , a prócz tego na dowolnej prostej m mamy dany odcinek $A'B'$ równy bokowi AB tego trójkąta, wówczas po każdej stronie prostej m istnieje przynajmniej jeden taki punkt C' , że trójkąt $A'B'C'$ równa się trójkątowi ABC .

§ 43. Samo przez się nasuwa się pytanie, w jaki sposób można faktycznie zbudować trójkąt, o którym mowa w pewniku IIIg.? Mamy tedy do rozwiązania następujące

Zadanie. Po jednej stronie prostej m zbudować trójkąt, równy danemu trójkątowi ABC , tak, by jeden jego bok leżał na tej prostej.

Zadanie rozwiążemy w zupełności, jeżeli potrafimy wyznaczyć trzy wierzchołki żadanego trójkąta. Dwa z nich możemy znaleźć odrazu. W tym celu wystarczy odłożyć na prostej m odcinek, równy któremukolwiek bokowi trójkąta ABC , np. odcinek $A'B' = AB$ (rys. 17). Pozostaje tedy do znalezienia trzeci wierzchołek C' .



Rys. 17.

Wiemy, iż wierzchołek C' musi być: 1) odległy od wierzchołka A' o odcinek równy bokowi b trójkąta danego; 2) odległy od wierzchołka B' o odcinek równy bokowi a . Otóż z określenia okręgu (§ 31) wiemy, że wszystkie punkty płaszczyzny, odległe od punktu A' o odcinek b , leżą na okręgu koła $(A')b$, wszystkie zaś punkty, odległe od B' o odcinek a , leżą na okręgu $(B')a$, i odwrotnie: wszystkie punkty tych okręgów odległe są od A' i B' o odcinki b i a . Pozostaje tedy wykreślić te dwa okręgi; spólny ich punkt, leżący po wskazanej stronie prostej m , musi być żadany wierzchołkiem C' .

Tu jednak nasuwają się dwie wątpliwości:

1-o czy okręgi te mają napewno spólny punkt?

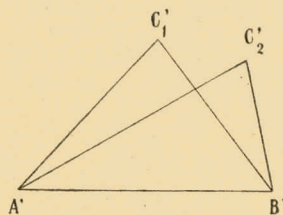
2-o czy po wskazanej stronie prostej m istnieje jeden taki punkt, czy też okręgi nasze mają dwa lub więcej punktów spólnych? Rzecz jasna, że gdyby tych punktów było kilka, nie wiedzielibyśmy, który z nich wybrać.

Na pierwsze pytanie mamy gotową odpowiedź w pewniku IIIg. Ponieważ, na mocy tego pewnika, istnieje punkt C' , a punkt ten musi leżeć jednocześnie na obu okręgach $(A')b$ i $(B')a$, zatem okręgi te napewno mają bodaj jeden punkt spólny.

Co się tyczy drugiego pytania, to łatwo jest przekonać się, że po jednej stronie prostej m okręgi nasze mają tylko jeden punkt spólny.

Jakoż przypuśćmy, że okręgi nasze mają dwa spólne punkty C'_1, C'_2 . Połączmy te punkty z punktami A', B' i porównajmy z sobą trójkąty $A'C'_1B'$ i $A'C'_2B'$ (rys. 18).

Mają one spólny bok $A'B'$, a oprócz tego $A'C_1' = A'C_2'$, $B'C_1' = B'C_2'$, zatem $\triangle A'B'C_1' \equiv \triangle A'B'C_2'$.



Rys. 18.

Ale to jest niemożliwe. Istotnie, odpowiadające sobie kąty ($\sphericalangle C_1'A'B'$ i $\sphericalangle C_2'A'B'$ oraz $\sphericalangle C_1'B'A'$ i $\sphericalangle C_2'B'A'$) tych trójkątów nie mogą równać się sobie, jeżeli punkt C_1' nie zlewa się z punktem C_2' .

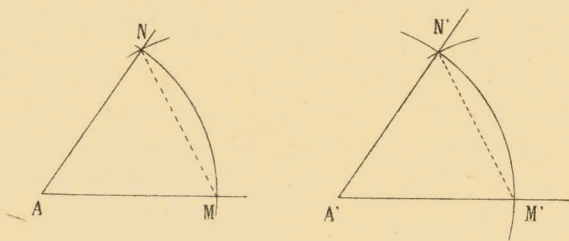
Widzimy, że przypuszczenie, jakoby okręgi nasze miały po jednej stronie prostej m dwa punkty wspólne, prowadzi do niedorzecznego wniosku. Wynika stąd, że okręgi te mają tylko jeden punkt spólny C' , który jest wierzchołkiem żadanego trójkąta $\triangle A'B'C'$.

§ 44. Za przypadek szczególny poprzedniego zadania można uważać następujące

Zadanie. Po jednej stronie danej prostej zbudować kąt, równy danemu kątowi.

Istotnie, jeżeli mamy dany kąt $\sphericalangle A$, możemy na jego ramionach obrać dwa dowolne punkty M, N , a następnie zbudować przy prostej m trójkąt, równy trójkątowi MAN .

Rzecz prosta, że zaoszczędzimy sobie pracy przy rysowaniu, jeżeli punkty M, N tak zostały obrane, że $MA = NA$. To spostrzeżenie prowadzi do następującego rozwiązania:



Rys. 19.

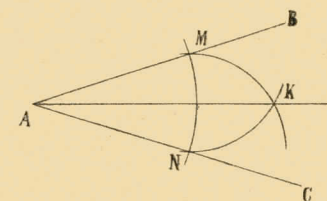
Z wierzchołka A kreślimy dowolnym promieniem koło, przecinające ramiona kąta danego w punktach M, N ; z punktu A' na prostej m kreślimy tym samym promieniem koło przecinające prostą m w punkcie M' , a następnie z punktu M' kreśli-

my drugie koło promieniem, równym MN . Dwa te koła mają po jednej stronie prostej m spólny punkt N' ; łącząc N' z A' ,

otrzymamy $\triangle A'M'N' \equiv \triangle ANM$,
a więc $\sphericalangle N'A'M' = \sphericalangle NAM$.

§ 45. Zadanie. Dany kąt podzielić na połowy.

Niech będzie dany dowolny kąt $\sphericalangle BAC$ (rys. 20). Z wierzchołka A , jako ze środka, kreślimy dowolnym promieniem okrąg koła, przecinający ramiona kąta w punktach M, N ; z punktów M, N , jako ze środków, kreślimy dwa nowe okręgi promieniem równym odcinkowi MN .



Rys. 20.

Te dwa okręgi mają, po jednej stronie prostej MN , spólny punkt K (dlaczego? — porówn. ćwiczenie II, 3, str. 22); powiadam, że półprosta AK dzieli kąt $\sphericalangle BAC$ na połowy.

Istotnie, $\triangle AMK \equiv \triangle ANK$,
gdyż $AM = AN, MK = NK$,

odcinek zaś AK jest spólnym bokiem tych trójkątów, a ponieważ w równych trójkątach kąty $\sphericalangle MAK, \sphericalangle KAN$ leżą naprzeciwko równych boków MK, NK , zatem są sobie równe.

Półprosta, dzieląca kąt na połowy, nazywa się dwusieczną tego kąta.

§ 46. Twierdzenie (II cecha równości trójkątów). Jeżeli dwa boki i kąt między nimi zawarty jednego trójkąta równają się odpowiednio dwom bokom i kątowi między nimi zawartemu drugiego trójkąta, wówczas trójkąty te są sobie równe (czyli pozostałe ich elementy odpowiednio równają się sobie).

Niech będą dane dwa trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$, w których

$$AB = A'B', AC = A'C' \text{ oraz } \sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'.$$

Powiadam, że wówczas musi być

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$$

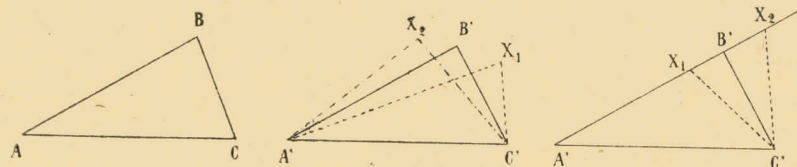
Jakoż na mocy pewnika IIIg wiemy, że po tej samej stronie prostej $A'C'$, po której leży wierzchołek B' , musi istnieć taki punkt X , że

$$\triangle A'XC' \equiv \triangle ABC,$$

przyczym $\sphericalangle BAC = \sphericalangle XA'C'$, $AB = A'X$, $AC = A'C'$.

Pozostaje dowieść, że punkt X musi zlewać się z punktem B' .

Istotnie, punkt X nie może leżeć ani wewnątrz kąta $\sphericalangle B'A'C'$, ani zewnątrz tego kąta, (rys. 21), gdyż wówczas kąt $\sphericalangle XA'C'$ nie równałby się kątowi $\sphericalangle BAC$, zatem X leży na ramieniu $B'A'$.



Rys. 21.

Ale w takim razie X musi zlewać się z punktem B' , gdyż w przeciwnym razie (rys. 21) bok $A'X$ trójkąta $\triangle A'XC'$ nie równałby się bokowi AB trójkąta $\triangle ABC$.

§ 47.3 Twierdzenie (III cecha równości trójkątów). Jeżeli dwa kąty i przyległy do nich bok jednego trójkąta równają się odpowiednio dwom kątom i przyległemu do nich bokowi drugiego trójkąta, wówczas oba trójkąty są sobie równe (czyli pozostałe ich elementy równają się sobie).

Niech będą dane (rys. 21) trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, w których

$$AC = A'C', \sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B', \sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A'$$

powiadam, że musi być również

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Zastosujemy dokładnie takie samo rozumowanie, jak w twierdzeniu poprzednim.

Na mocy pewnika IIIg wiemy, iż po tej stronie prostej $A'C'$, po której leży wierzchołek B' , musi istnieć taki punkt X ,

że $\triangle A'XC' \equiv \triangle ABC$,
przyczym $\sphericalangle XA'C' = \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle XC'A' = \sphericalangle BCA$.

Pozostaje dowieść, że punkt X zlewa się z punktem B' .

Jakoż X nie może leżeć ani wewnątrz, ani zewnątrz kąta $\sphericalangle B'A'C'$ (rys. 21), gdyż wówczas kąt $\sphericalangle XA'C'$ nie równałby się kątowi $\sphericalangle BAC$. Zatem X leży na ramieniu $A'B'$.

Dalej, X nie może leżeć ani wewnątrz, ani zewnątrz odcinka $A'B'$ (rys. 21), gdyż w takim razie kąt $\sphericalangle XC'A'$ nie równałby się kątowi $\sphericalangle BCA$.

Widzimy tedy, że X musi zlewać się z punktem B' czyli że $\triangle A'B'C'$ jest właśnie owym trójkątem równym trójkątowi $\triangle ABC$, o którym mowa w pewniku IIIg.

Ćwiczenia IV.1. Mamy dany czworobok przegubowy t. j. taki, którego boki są stałej długości, ale mogą obracać się dookoła wierzchołków; czy można usztywnić go za pomocą dodatkowego (piątego) pręta?

To samo pytanie w zastosowaniu do pięciokąta przegubowego.

2. W pięciokącie przegubowym, którego wierzchołki ponumerowaliśmy kolejno od 1 do 5, łączymy za pomocą dodatkowych prętów pierwszy wierzchołek z trzecim i drugi z piątym; czy pięciokąt jest teraz sztywny?

Zadanie 3. Zbudować trójkąt, którego wszystkie trzy boki równałyby się danemu odcinkowi a . Ile takich trójkątów zbudować można po jednej stronie danego odcinka a ?

4. Mamy dany $\triangle ABC$; na dowolnej prostej m odkładamy odcinek $A'B' = AB$, poczym z punktu A' , jako ze środka, kreślimy koło promieniem równym a , z punktu zaś B' kreślimy drugie koło promieniem równym b . Czy okręgi tych kół mają punkt wspólny? Ile mają punktów wspólnych? W szczególności: czy po jednej stronie prostej m okręgi te mogą mieć więcej niż jeden punkt wspólny?

Ile wobec tego rozwiązań posiada zadanie, o którym była mowa w § 43?

5. Niech będą dane dwa kąty przyległe $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle CBD$; zbudować ich dwusieczną i dowieść, że dwusieczna ta się do siebie prostopadle.

6. Niech będzie dany kąt wypukły $\sphericalangle AOB$; zbudować jego dwusieczną, przedłużyć ją po drugiej stronie wierzchołka O i dowieść, że to przedłużenie jest dwusieczną kąta wklęsłego

$\sphericalangle AOB$; i odwrotnie: przedłużenie dwusiecznej kąta wklęsłego $\sphericalangle AOB$ jest zarazem dwusieczną kąta wypukłego $\sphericalangle AOB$.

7. Mamy dane dwa kąty wierzchołkowe $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle COD$; wykreślić dwusieczną kąta $\sphericalangle AOB$, i dowieść, że jej przedłużenie jest dwusieczną kąta $\sphericalangle COD$.

8. Mamy dane dwa kąty wierzchołkowe $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle COD$; wykreślić ich dwusieczne i dowieść, że tworzą one jedną prostą.

9. Zbudować trójkąt, mając dane dwa boki a , b i kąt $\sphericalangle C$. Ile mamy rozwiązań?

10. Zbudować trójkąt, mając dane: kąty $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ i bok c . Ile mamy rozwiązań?

11. Mając dany $\triangle ABC$, zbudować równy mu $\triangle DAE$ tak, by kąt $\sphericalangle BAC$ pierwszego trójkąta był wierzchołkowy względem kąta $\sphericalangle DAE$ drugiego trójkąta. Ile można zbudować trójkątów $\triangle DAE$ odpowiadających warunkom zadania?

12. Dowieść, że każdy kąt $\sphericalangle A$ można podzielić na połowy w następujący sposób:

na ramionach kąta odkładamy, poczynając od wierzchołka, po dwa równe odcinki, np. $AB = AC$, $BD = CE$, poczym łączymy B z E oraz C z D ; jeżeli przez M oznaczymy punkt przecięcia się prostych BE , CD , wówczas półprosta AM musi być dwusieczną kąta danego $\sphericalangle BAC$.

13. Dwa czworoboki są równe, jeżeli trzy boki i dwa kąty między nimi zawarte jednego czworoboku równają się odpowiednio trzem bokom i dwom kątom między nimi zawartym drugiego czworoboku.

14. Dwa czworoboki równają się sobie, jeżeli kąty przy trzech kolejnych wierzchołkach i dwa między nimi zawarte boki jednego czworoboku równają się odpowiednim kątom i bokom drugiego czworoboku.

ROZDZIAŁ II.

Trójkąt równoramienny.

§ 48. Określenia. Trójkąt nazywamy równoramiennym, jeżeli ma dwa równe boki. Trzeci bok takiego trójkąta będziemy często nazywali jego podstawą.

Trójkąt, którego wszystkie trzy boki równają się sobie, nazywamy równobocznym albo foremnym.

Wysokością trójkąta nazywamy odcinek, poprowadzony z wierzchołka prostopadle do przeciwległego boku lub do jego przedłużenia. Punkt, w którym wysokość spotyka bok trójkąta (lub jego przedłużenie) nazywa się *podkiem wysokości*.

Środkową trójkąta nazywamy odcinek, łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

§ 49. Twierdzenie. W trójkącie równoramiennym kąty przeciwległe równym bokom są sobie równe.

§ 50. Twierdzenie: W trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta, zawartego między równymi bokami, jest zarazem wysokością i środkową.

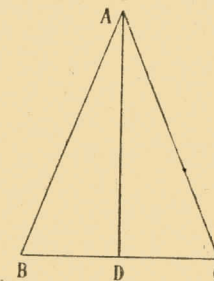
Obu tych twierdzeń możemy dowieść razem, a to w następujący sposób.

Niech będzie dany trójkąt równoramienny $\triangle ABC$, w którym mianowicie $AB = AC$; powiadam, że

- 1) $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$,
- 2) $BD = DC$,
- 3) $AD \perp BC$,

Aby dowieść tych trzech własności trójkąta równoramiennego, prowadzę dwusieczną AD kąta, zawartego między równymi bokami, i otrzymuję dwa równe trójkąty

$$\triangle BAD = \triangle ADC.*)$$



Rys. 22.

Istotnie, trójkąty te mają spólny bok AD ; prócz tego $AB = AC$, kąty zaś $\sphericalangle BAD$ i $\sphericalangle DAC$ są sobie równe.

Z równości trójkątów $\triangle BAD$, $\triangle ADC$ wynika, iż

$$\begin{aligned}\sphericalangle ABC &= \sphericalangle ACB, \\ BD &= DC, \\ \sphericalangle ADB &= \sphericalangle ADC,\end{aligned}$$

że zaś dwa te kąty są do siebie przyległe, zatem każdy z nich jest prosty i odcinek AD jest, istotnie, prostopadły do BC czyli jest wysokością trójkąta $\triangle ABC$.

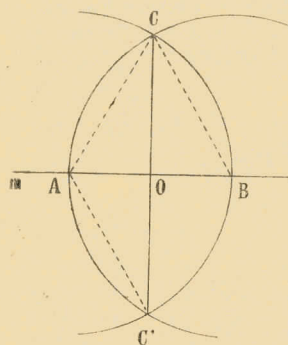
Wniosek. W trójkącie równobocznym 1) wszystkie kąty są sobie równe; 2) dwusieczna każdego z trzech kątów jest zarazem wysokością i środkową.

*) Gdyby trójkąt $\triangle ABC$ wycięty był z papieru, wówczas, chcąc sprawdzić równość kątów $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$, złożylibyśmy trójkąt we dwoje czyli przelamalibyśmy go wzdłuż dwusiecznej kąta $\sphericalangle A$. Stąd pomysł dowodu podanego w tekście.

§ 51. Z powyższych własności trójkąta równoramiennego wynikają rozwiązania trzech bardzo ważnych zadań konstrukcyjnych.

Zadanie. Dany odcinek podzielić na połowy.

W tym celu wystarczy na danym odcinku, jako na podstawie, zbudować jakikolwiek trójkąt równoramienny i poprowadzić w tym trójkącie dwusieczną kąta przeciwległego podstawie.



Rys. 23.

Ponieważ trójkąt równoboczny umiemy już budować (ćwiczenia IV, 3, str. 33), mamy tedy następujące rozwiązanie:

z końców A, B danego odcinka (rys. 23) kreślimy koła promieniami równymi temu odcinkowi; okręgi tych kół mają dwa wspólne punkty C, C' , leżące po dwóch różnych stronach prostej AB ; w trójkącie równoramiennym $\triangle ACB$ prosta CC' jest dwusieczną kąta $\sphericalangle ACB$ (dlaczego?), a

więc dzieli odcinek AB na połowy w punkcie O .

§ 52. Zadanie. Dana prosta m i na niej punkt O ; wystawić w tym punkcie prostą prostopadłą do prostej m .

Zadanie da się rozwiązać za pomocą tej samej konstrukcji, którą stosowaliśmy w § 51, o ile uczynimy punkt O środkiem jakiegokolwiek odcinka, leżącego na prostej m .

Mamy tedy rozwiązanie następujące: po obie strony punktu O odkładamy na prostej m dwa dowolne, lecz równe sobie odcinki $OA = OB$; z punktów A i B , jako ze środków, kreślimy okręgi $(A)B$ i $(B)A$; prosta CC' , łącząca wspólne punkty tych okręgów, jest żadaną prostą prostopadłą, gdyż na mocy poprzedniego zadania przechodzi przez punkt O , na mocy zaś twierdzenia § 50 jest prostopadła do prostej m .

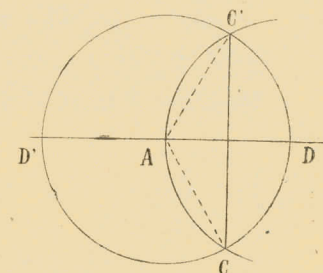
§ 53. Zadanie. Dana prosta m i punkt C nie leżący na niej; z C poprowadzić prostą prostopadłą do prostej m .

Przyglądając się rysunkowi 23, widzimy, że zadanie będzie rozwiązane, jeżeli potrafimy zbudować trójkąt równoramienny $\triangle CAC'$ tak, by prosta m była w nim dwusieczną kąta, przeciwległego podstawie CC' . To znów da się osiągnąć, jeżeli

po dwu stronach prostej m potrafimy zbudować dwa równe sobie (zresztą dowolne) trójkąty $\triangle ACB \equiv \triangle AC'B$, gdyż w takim razie będziemy mieli zarówno $AC = AC'$, jak $\sphericalangle CAB = \sphericalangle BAC'$.

To spostrzeżenie prowadzi do następującej konstrukcji:

na prostej m obieramy dowolny punkt A i kreślimy okrąg $(A)C$, przecinający prostą m w punktach D i D' ; z punktu D , jako ze środka, kreślimy okrąg $(D)C$, który z poprzednim okręgiem ma dwa wspólne punkty C i C' ; prosta CC' jest żadaną prostą prostopadłą.



Rys. 24.

Uwaga. Ponieważ wiemy (ćwiczenia IV, 6, str. 33), że dwusieczna kąta wklęsłego $\sphericalangle CAC'$ jest zarazem dwusieczną kąta wypukłego $\sphericalangle CAC'$, zatem zamiast budować, jak w powyższym rozwiązaniu, $\sphericalangle DAC' = \sphericalangle DAC$, moglibyśmy zbudować $\sphericalangle C'AD' = \sphericalangle CAD'$. Innymi słowami: zamiast kreślić okrąg koła $(D)C$, moglibyśmy równie dobrze wykreślić okrąg $(D')C$.

Ćwiczenia V. 1. Dany odcinek AB i na nim punkt P ; po jednej stronie tego odcinka budujemy dowolne, ale równe sobie kąty $\sphericalangle APM = \sphericalangle BPN$, następnie zaś prowadzimy dwusieczną kąta $\sphericalangle MPN$; dowieść, że dwusieczna ta jest prostą prostopadłą do AB w punkcie P .

2. Mając dane: sumę a dwóch niewiadomych odcinków x, y oraz różnicę ich b , znaleźć odcinki x, y .

3. W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$, w którym $AB = AC$, wykreślić środkowe BB', CC' i dowieść, że $BB' = CC'$.

4. W tym samym trójkącie wykreślić dwusieczne BB_1, CC_1 kątów wewnętrznych i dowieść, że $BB_1 = CC_1$.

5. Czy można własność, o której mowa w ćwiczeniu poprzednim, uogólnić na dwusieczne kątów zewnętrznych? Jak należałoby ją w takim razie sformułować?

6. Na bokach trójkąta równobocznego $\triangle ABC$ odkładamy w tym samym zwrocie*) trzy równe odcinki $AK = BL = CM$; dowieść, że $\triangle KLM$ jest równoboczny.

Czy twierdzenie pozostanie prawdziwe, jeżeli odkładane odcinki są większe od boku trójkąta danego $\triangle ABC$? Czy możnaby odkładać je nie na bokach, lecz na przedłużeniach boków trójkąta?

*) Wyobraźmy sobie, że obchodzimy kontur trójkąta $\triangle ABC$, poruszając od wierzchołka A . Możemy to uczynić w dwojaki sposób: albo idąc od A przez B do C i z powrotem do A , albo też od A przez C do B i z powrotem do A . Odpowiednio do tego rozróżniamy na konturze trójkąta dwa wprost sobie przeciwne zwroty.

Dowieść, że dwa trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ są sobie równe, jeżeli mają odpowiednio równe następujące odcinki i kąty:*)

7. a, b, s_a . 8. $u_a, d_C, \sphericalangle(c, d_C)$. 9. $a, s_b, (a, \sphericalangle s_b)$.
 10. $A, c, \sphericalangle(c, s_b)$. 11. a, b, s_c . [Wskazówka: przedłużyć środkowe obu trójkątów i na przedłużeniach odłożyć odcinki równe środkowym s_c, s_c' .]

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:**)

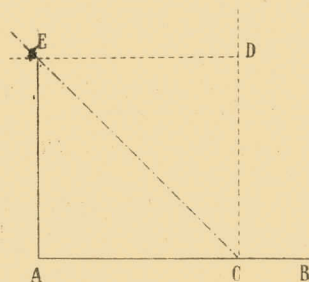
12. r_a, r_b, h_c . 17. r_a, B, C . 22. $b, s_b, \sphericalangle(s_b, b)$.
 13. r_a, c, h_c . 18. r_a, h_c, C . 23. $b, C, \sphericalangle(s_b, b)$.
 14. r_a, r_b, A . 19. $c, a, \sphericalangle(h_a, c)$. 24. $b, C, \sphericalangle(s_a, b)$.
 15. $r_a, h_c, \sphericalangle(h_c, b)$. 20. A, d_A, r_b . 25. a, B, d_B .
 16. $r_a, B, \sphericalangle(h_c, b)$. 21. $c, B, \sphericalangle(c, s_a)$. 26. $u_a, d_C, \sphericalangle(d_C, c)$.

27. Dany kąt $\sphericalangle A$ i wewnątrz niego punkt M ; przez M poprowadzić prostą BC tak, by otrzymać trójkąt równoramienny $\triangle ABC$, w którym $AB = AC$.

Zbudować trójkąt równoramienny $\triangle ABC$, mając dane:**)

28. c, h_c . 29. h_c, C . 30. c, C .

31. Podana w § 52 konstrukcja zawodzi, jeżeli mamy wystawić prostopadłą w końcu odcinka i jeżeli odcinka tego nie wolno przedłużać. W takim razie można zastosować następujące rozwiązanie, znalezione przez Herona z Aleksandrii: jeżeli w końcu A odcinka danego AB mamy wystawić prostopadłą, wówczas na AB obieramy dowolny punkt C , wystawiamy w nim prostopadłą, na niej odkładamy $CD = CA$, w punkcie D wystawiamy znów prostopadłą do CD , wreszcie prowadzimy dwusieczną kąta $\sphericalangle DCA$. Niech E będzie punktem przecięcia się dwusiecznej z prostopadłą, wystawioną w punkcie D ; prosta AE jest żadaną prostopadłą. Dowieść tego.***)



Rys. 25.

§ 54. Twierdzenie. Z punktu leżącego na prostej można poprowadzić do tej prostej tylko jedną prostopadłą.

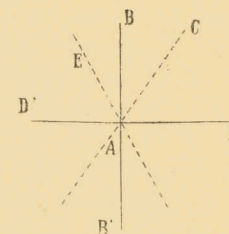
Jeżeli prosta AB jest w punkcie A prostopadła do prostej danej m (rys. 26), wówczas żadna inna prosta, przechodząca

*) Co się tyczy oznaczeń, porówn. spis I i II na str. 2.

**) Co się tyczy oznaczeń, porówn. spis I i II na str. 2.

***) Później poznamy inne, dogodniejsze rozwiązania tego zagadnienia.

przez punkt A , nie może być prostopadłą do m . Istotnie, każda inna prosta (np. AC lub AE) musi leżeć albo wewnątrz kąta $\sphericalangle BAD$ (i wierzchołkowego kąta $\sphericalangle B'AD'$), albo wewnątrz kąta $\sphericalangle BAD'$ (i wierzchołkowego kąta $\sphericalangle DAB'$), a więc nie może tworzyć z prostą m kąta prostego.

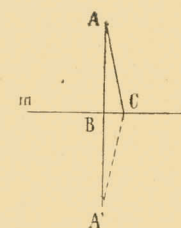


Rys. 26.

§ 55. Twierdzenie. Z punktu, nie leżącego na prostej, można poprowadzić do tej prostej tylko jedną prostopadłą.

Jakoż przypuścimy, że z punktu A , nie leżącego na prostej m , można do tej prostej poprowadzić prostopadłe: AB i AC . Wykażemy, że takie przypuszczenie prowadzi do sprzeczności.

Na prostopadłej AB odłóżmy po drugiej stronie prostej m odcinek $BA' = BA$ i połączmy A' z C .



Rys. 27.

Rzecz oczywista, że $\triangle ABC \equiv \triangle CBA'$, gdyż mają one spólny bok BC , a oprócz tego

$$AB = BA' \text{ i } \sphericalangle ABC = \sphericalangle CBA'.$$

Z równości tych trójkątów wynika, że

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'CB,$$

a ponieważ przypuściliśmy, że $\sphericalangle ACB$ jest prosty, zatem i kąt $\sphericalangle A'CB$ musi być prosty. Widzimy tedy, że linia ACA' nie może być (jak na rys. 27) łamaną, lecz musi być prostą. Otóż wniosek ten jest niedorzeczny, gdyż w takim razie dwie różne proste ABA' , ACA' miałyby dwa punkty spólne, co przeczy pewnikowi I_a.

Przypuszczenie, że z punktu A można wykreślić do prostej m dwie prostopadłe, prowadzi do wniosku niedorzecznego, a więc musimy uznać za prawdę, że przez punkt A przechodzi tylko jedna prosta, prostopadła do m .

56. W dwóch ostatnich twierdzeniach, jak również w niektórych poprzednich (np. w §§ 46, 47) stosowaliśmy dowód, zwany *sprawdzeniem*.

niem do sprzeczności lub do niedorzeczności (*reductio ad absurdum*). Ponieważ w matematyce często uciekamy się do takich dowodów, musimy więc przyjrzeć się nieco bliżej ich budowie.

Każde twierdzenie matematyczne ująć można w formę zdania warunkowego. Np. twierdzenie ostatnie (§ 55) da się wypowiedzieć w następujący sposób:

Jeżeli punkt nie leży na danej prostej, wówczas przez punkt ten można poprowadzić tylko jedną prostą prostopadłą do danej prostej.

Zdanie warunkowe (a więc i każde twierdzenie matematyczne) składa się z dwóch części: z założenia i z wniosku.* W powyższym przykładzie założenie rozpoczyna się od wyrazu „jeżeli”, wniosek zaś od wyrazu: „wówczas”. Mamy więc założenie: „punkt nie leży na danej prostej”, wniosek: „przez punkt ten można poprowadzić tylko jedną prostą prostopadłą do danej prostej”.

Otóż dowód przez sprowadzenie do niedorzeczności polega na wykazaniu, że kto zgadza się z założeniem twierdzenia, musi zgodzić się z wnioskiem, gdyż popadłby w sprzeczność czy to z tym samym założeniem, czy z jakąś inną, poprzednio ustaloną prawdą. Jeżeli np. w § 55 odrzucimy wniosek twierdzenia, staniemy w sprzeczności z pewnikiem: „dwa punkty wyznaczają prostą”; tak samo w § 54 stajemy w sprzeczności z pewnikiem: „wszystkie kąty proste są sobie równe”.

Chcąc tedy zastosować ten sposób rozumowania, winniśmy zachować bez zmiany założenie twierdzenia, lecz zaprzeczyć wnioskowi, przez co z twierdzenia, którego prawdziwości chcemy dowieść, tworzymy nowe twierdzenie (przeczące poprzedniemu), i dowodzimy, że to nowe twierdzenie jest niedorzeczne. Chcemy np. dowieść, że

„jeżeli punkt leży na danej prostej, wówczas przez punkt ten można poprowadzić do danej prostej tylko jedną prostą prostopadłą”; w tym celu tworzymy nowe twierdzenie:

„jeżeli punkt leży na danej prostej, wówczas przez punkt ten można poprowadzić do danej prostej nie tylko jedną prostą prostopadłą (a więc co najmniej dwie).” i dowodzimy, że to nowe twierdzenie przeczy znanej prawdzie o równości kątów prostych.

Przy zastosowaniu tej metody należy zachować pewną ostrożność. Mianowicie zdarza się często, że po odrzuceniu wniosku jakiegoś twierdzenia mamy do wyboru kilka możliwych przypuszczeń; w takim razie musimy je zbadać wszystkie bez wyjątku; gdybyśmy opuścili chociaż jedno z tych możliwych przypuszczeń, dowód nasz nie byłby przekonujący. Rzecz prosta, że w takim wypadku z twierdzenia danego tworzymy nie jedno nowe twierdzenie, lecz tyle nowych twierdzeń,

*) Właściwie twierdzenie może mieć kilka założeń, jak się o tym wkrótce przekonamy, ale fakt ten nie wpływa na metodę rozumowania, o której obecnie mówimy.

ile różnych przypuszczeń można uczynić po odrzuceniu wniosku w twierdzeniu danym.

Np. w § 46 dowiedliśmy, że

jeżeli $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$,

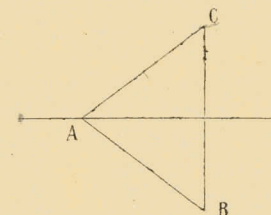
wówczas $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

W tym celu, zachowując bez zmiany założenie twierdzenia, odrzuciliśmy wniosek, mianowicie przypuściliśmy, że $\triangle A'B'C'$ nie równa się trójkątowi $\triangle ABC$. Ponieważ z pewnika IIIg. wiedzieliśmy o istnieniu takiego punktu X , że $\triangle A'XC' \equiv \triangle ABC$, zatem stanęliśmy wobec trzech możliwości: punkt X mógł leżeć 1) wewnątrz kąta $\sphericalangle B'A'C'$, 2) zewnątrz tego kąta, 3) na jego ramieniu. Rzecz jasna, że żadne inne położenie punktu X nie da się pomyśleć. Wypadło tedy zbadać po kolei każde z tych trzech przypuszczeń i wykazać, że każde z nich jest niedorzeczne.

§ 57. Twierdzenie. W każdym kącie istnieje tylko jedna dwusieczna.

Istotnie, mając dany dowolny kąt wypukły $\sphericalangle A$, możemy odłożyć na jego ramionach równe odcinki $AB = AC$, przez co otrzymujemy trójkąt równoramienny $\triangle ABC$. Dwusieczna kąta $\sphericalangle A$ jest zarazem prostą prostopadłą do odcinka BC (§ 50), gdyby więc kąt $\sphericalangle A$ posiadał więcej niż jedną dwusieczną, wówczas z punktu A można byłoby poprowadzić do prostej BC więcej niż jedną prostą prostopadłą — co przeczyłoby twierdzeniu § 55.

Twierdzenie nasze jest prawdziwe i dla kątów wypukłych, gdyż np. dwusieczna kąta wklęsłego $\sphericalangle BAC$ (rys. 28) jest zarazem dwusieczną kąta wypukłego $\sphericalangle BAC$ (Ćwiczenie IV, 6, str. 33).



Rys. 28.

§ 58. W § 55 poznaliśmy twierdzenie, że w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta, zawartego między równymi bokami, jest zarazem wysokością i środkową tego trójkąta. Obecnie wiemy już, że z danego wierzchołka można poprowadzić w trójkącie tylko jedną dwusieczną kąta wewnętrznego (§ 57), tylko jedną wysokość (§ 55) i tylko jedną środkową, jak również w środku boku można wystawić tylko jedną prostą prostopadłą (§ 54). Mamy więc prawo twierdzić, że w trójkącie równoramiennym te cztery linie, o ile są poprowadzone do podstawy trójkąta, zlewają się zawsze w jedną prostą, czyli możemy wypowiedzieć następujące:

Twierdzenia odwrotne (względem t.w. § 50). I. W trójkącie równoramiennym wysokość, poprowadzona do podstawy, jest zarazem środkową i dwusieczną.

II. W trójkącie równoramiennym środkowa, poprowadzona do podstawy, jest zarazem dwusieczną i wysokością.

III. Prostopadła, wystawiona w środku podstawy trójkąta równoramiennego, przechodzi przez wierzchołek i jest dwusieczną kąta między równymi bokami.

§ 59. Jeżeli między dwoma twierdzeniami zachodzi taki związek, że założenie pierwszego jest w drugim twierdzeniu wnioskiem, wniosek zaś pierwszego twierdzenia jest w drugim twierdzeniu założeniem, wówczas jedno (którekolwiek) z tych twierdzeń nazywamy *prostym*, drugie zaś *odwrotnym*.

W ten sposób z twierdzenia:

„jeżeli suma $a + b$ dwóch odcinków jest mniejsza od trzeciego odcinka c , wówczas każdy z odcinków a , b jest mniejszy od odcinka c ”

otrzymujemy twierdzenie odwrotne:

jeżeli każdy z odcinków a , b jest mniejszy od odcinka c , wówczas suma ich $a + b$ jest też mniejsza od odcinka c ”.

Jak widzimy na tym przykładzie, twierdzenie odwrotne może nie być prawdziwe, mimo że twierdzenie proste jest prawdziwe. Stąd wynika potrzeba specjalnego badania twierdzeń odwrotnych.

Może się zdarzyć, że jakieś twierdzenie posiada dwa lub więcej założeń; w takim razie można z niego utworzyć tyle twierdzeń odwrotnych, ile mamy założeń. Dla przykładu weźmy następujące twierdzenie, posiadające dwa założenia:

Założenie I: jeżeli mamy dany trójkąt równoramienny

Założenie II: jeżeli pewna prosta jest w nim wysokością, poprowadzoną do podstawy,

Wniosek: wówczas prosta ta jest zarazem środkową.

Możemy utworzyć z niego dwa twierdzenia odwrotne. Jeżeli mianowicie przedstawimy wniosek z założeniem II, otrzymamy twierdzenie odwrotne, dowiedzione w poprzednim paragrafie. Jeżeli jednak przedstawimy wniosek z założeniem I, otrzymamy następujące, nowe twierdzenie odwrotne, którego czytelnik z łatwością sam dowiedzie:

§ 60. **Twierdzenie odwrotne:** Jeżeli środkowa trójkąta jest zarazem jego wysokością, wówczas trójkąt jest równoramienny (a mianowicie: bok, do którego ta środkowa została poprowadzona, jest podstawą trójkąta równoramiennego).

§ 61. **Twierdzenie odwrotne** (względem t.w. § 49). Jeżeli dwa kąty trójkąta są sobie równe, wówczas przeciwległe im boki równają się sobie.

Niech będzie dany $\triangle ABC$, w którym $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ (rys. 29); powiadam, że wówczas $AB = AC$.

Jakoż po drugiej stronie prostej BC zbudujemy trójkąt $\triangle BCA' \equiv \triangle BCA$ tak, by $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ i $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$. (Powówn. ćwiczenie IV, 10).

W równych trójkątach naprzeciwko równych kątów leżą równe boki, a więc

$AB = BA'$ i $AC = CA'$,

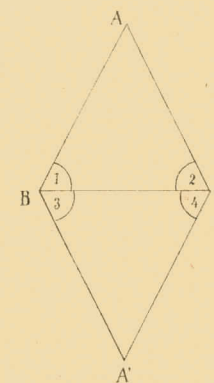
gdyż $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ i $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$,

ale zarazem mam

$AB = CA'$ i $AC = BA'$, gdyż $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 4$ i $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$.

Z tych równości wynika, że musi być

$AB = AC$.



Rys. 29.

Ćwiczenia VI. 1. Dane jest twierdzenie następujące: „w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta, zawartego między równymi bokami, jest zarazem wysokością”. Wyszczególnić oba założenia tego twierdzenia i wniosek; sformułować oba twierdzenia odwrotne i dowieść tego twierdzenia odwrotnego, które otrzymujemy, przedstawiając pierwsze założenie i wniosek.

2. Dane jest twierdzenie: „jeżeli dwa kąty mają wspólne ramie i jeżeli dwusieczne ich są do siebie prostopadłe, wówczas dwa drugie ramiona tych kątów tworzą jedną prostą”. Dowieść tego twierdzenia i wykazać, że jest to twierdzenie odwrotne względem twierdzenia, podanego w ćwiczeniu IV, 5 (str. 33).

3. Twierdzenie: „kąty wierzchołkowe są sobie równe” sformułować tak, by uwidocznili, że ma ono dwa założenia. Wykazać, że odwroceniem jego jest następujące twierdzenie: jeżeli w dwóch kątach $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle A'OB'$ ramiona OA , OA' tworzą jedną prostą i jeżeli kąty te są sobie równe, wówczas drugie dwa ramiona (mianowicie OB , OB') tworzą również jedną prostą. Dowieść tego twierdzenia.

4. Wzorując się na poprzednim ćwiczeniu, odwrócić twierdzenie, podane w ćwiczeniu IV, 7, str. 34.

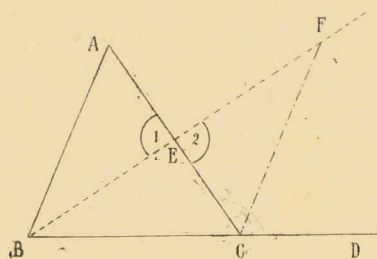
5. Po dwóch stronach prostej AB dane są punkty X , Y ; znaleźć na prostej AB taki punkt Z , żeby było $\sphericalangle XZA = \sphericalangle YZA$. Ile rozwiązań posiada to zadanie? Czy jest ono zawsze możliwe do rozwiązania?

6. Matematyk arabski an-Nairizi (w. IX po Chr.) w następujący sposób dowodzi twierdzenia § 61: jeżeli w $\triangle ABC$ mamy $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ i chcemy dowiedzieć, że $AB = AC$, wówczas odkładamy na tych bokach równe (zresztą dowolnej wielkości) odcinki $BL = CK$, poczym dowodzimy, że $\triangle BLC \equiv \triangle CKL$ oraz $\triangle ABK \equiv \triangle ACL$. Przeprowadzić szczegółowo ten dowód.

ROZDZIAŁ III.

Kąt zewnętrzny. Klasyfikacja trójkątów. Cechy równości trójkątów prostokątnych.

§ 62. Twierdzenie. Kąt zewnętrzny trójkąta jest większy od każdego z dwóch wewnętrznych, do niego nie przyległych.



Rys. 30.

Niech będzie dany trójkąt ABC i kąt jego zewnętrzny $\sphericalangle ACD$; powiadam, że $\sphericalangle ACD$ jest większy zarówno od kąta $\sphericalangle BAC$, jak od kąta $\sphericalangle ABC$.

Cheąc tego dowiedzieć, prowadzimy środkową BE i na jej przedłużeniu odkładamy odcinek $EF = BE$, wreszcie łączymy F z C .

Ponieważ $EA = EC$, $EB = EF$, $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$,
zatem $\triangle ABC \equiv \triangle ECF$,
wobec czego $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACF$.
Ale $\sphericalangle ACF < \sphericalangle ACD$,*)
zatem $\sphericalangle BAC < \sphericalangle ACD$.

Czytelnik sam dowiedzie drugiej części twierdzenia, mianowicie tego, że

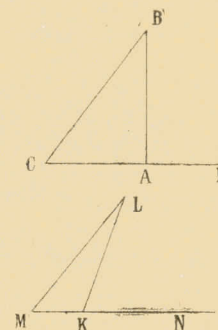
$$\sphericalangle ABC < \sphericalangle ACD.$$

*) Nierówność tę można uzasadnić w następujący sposób: punkty F i B leżą niewątpliwie po przeciwnych stronach prostej AC , ale zarazem punkt F , jako położony na przedłużeniu środkowej BE , leży wewnątrz kąta $\sphericalangle ABC$ (§). Wobec tego punkt F musi leżeć wewnątrz kąta $\sphericalangle ACD$, czyli kąt $\sphericalangle ACF$ musi być mniejszy od $\sphericalangle ACD$.

Wniosek. W trójkącie, w którym jeden kąt jest prosty lub rozwarty, drugie dwa kąty są ostre.

Istotnie, jeśli mamy dany trójkąt $\triangle ABC$ (rys. 31), w którym $\sphericalangle A$ jest prosty, wówczas kąt zewnętrzny $\sphericalangle BAD$ musi być też prosty; ale na mocy powyższego twierdzenia kąt $\sphericalangle BAD$ jest większy od każdego z dwóch kątów wewnętrznych $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$.

Czytelnik sam uzasadni ten wniosek w przypadku, gdy w trójkącie $\triangle KLM$ kąt $\sphericalangle LKM$ jest rozwarty.



Rys. 31.

§ 63. Z powyższego wniosku wynika bezpośrednio, że wszystkie trójkąty możemy podzielić na trzy kategorie: na trójkąty rozwartokątne, prostokątne i ostrokątne, zależnie od tego, czy mają one jeden kąt rozwarty, czy jeden kąt prosty, czy też wszystkie trzy ich kąty są ostre. W trójkącie prostokątnym bok, przeciwległy kątowi prostemu, nazywa się *przeciwprostokątną*, dwa drugie jego boki nazywamy *przyprostokątnymi*.

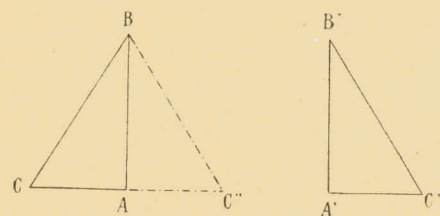
§ 64. Prócz trzech cech równości trójkątów, które poznaliśmy poprzednio, przy badaniu trójkątów prostokątnych bywa często potrzebna następująca cecha:

Twierdzenie (cecha równości trójkątów prostokątnych). Jeżeli *przyprostokątna* i *przeciwprostokątna* *a* jednego trójkąta równają się odpowiednio *przyprostokątnej* i *przeciwprostokątnej* drugiego trójkąta, wówczas dwa te trójkąty są sobie równe.

Niech będą dane trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, w których kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle A'$ niech będą proste. Jeżeli mamy $AB = A'B'$ oraz $BC = B'C'$, wówczas, powiadam, że $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Aby tego dowiedzieć, buduję na boku AB , po stronie przeciwległej wierzchołkowi C , trójkąt $\triangle ABC'' \equiv \triangle A'B'C'$.*)

*) Gdybyśmy mieli do czynienia z figurami materialnymi, np. wyciętymi z papieru, powiedzielibyśmy po prostu: do trójkąta $\triangle ABC$ przedstawiamy $\triangle A'B'C'$ tak, by równe przyprostokątne AB , $A'B'$ przystały do siebie; wówczas z tych dwu trójkątów tworzy się jeden trójkąt równoramienny.



Rys. 32.

Odcinki AC, AC'' leżą na jednej prostej (dla czego?), a więc figura CBC'' jest trójkątem równoramiennym (mianowicie $CB = BC''$), w którym AB jest wysokością, poprowadzoną do podstawy. Wiemy, (§ 58, str. 42), że

$$\triangle CBA \equiv \triangle BAC''$$

i, co zatym idzie, $\triangle CBA \equiv \triangle A'B'C'$.

Ćwiczenia VII. 1. Wymienić wszystkie kąty na rys 30, które są większe od kąta $\sphericalangle A$. Wszystkie kąty większe od $\sphericalangle F$. Wszystkie kąty mniejsze od kąta $\sphericalangle AEF$. Wszystkie kąty mniejsze od kąta $\sphericalangle AEB$.

2. Jeżeli w dowolnym trójkącie $\triangle ABC$ poprowadziliśmy dwusieczną kąta wewnętrznego $\sphericalangle A$ i jeżeli dwusieczna ta przecina bok BC w punkcie D , wówczas $\sphericalangle ADC > \sphericalangle DAC$ oraz $\sphericalangle ADB > \sphericalangle DAB$.

3. W każdym trójkącie suma dwóch którychkolwiek kątów zewnętrznych jest większa od kąta półpełnego.

4. Z punktu zewnętrznego nie można poprowadzić do danej prostej więcej, niż dwa równe odcinki [Wskazówka: dowód przez sprowadzenie do niedorzeczności].

5. Dowieść, że suma dwóch kątów wewnętrznych trójkąta jest mniejsza od dwóch kątów prostych. [Wskazówka: chcąc dowieść, że suma $\sphericalangle A + \sphericalangle B$ jest mniejsza od kąta półpełnego, prowadzimy z C dowolną prostą, przecinającą bok AB w punkcie D i rozważamy kąty, które powstały przy D].

6. Jeżeli wewnątrz trójkąta obierzemy dowolny punkt O , wówczas musi być $\sphericalangle BAC < \sphericalangle BOC$.

7. W trójkącie ostrokątnym każda wysokość leży wewnątrz trójkąta, natomiast w trójkącie rozwartokątnym wysokości, poprowadzone z wierzchołków obu kątów ostrych, leżą zewnątrz trójkąta. [Wskazówka: sprowadzenie do riedorzeczności].

8. Mamy dany $\triangle ABC$, w którym $\sphericalangle A$ jest rozwarty; prowadzimy wysokość BD , z punktu D prowadzimy prostopadłą DE do boku AB i przedłużamy ją do przecięcia się w punkcie F z bokiem BC . W ten sposób otrzymujemy czworobok $AEFC$. Dowieść, że jego kąt zewnętrzny przy wierzchołku C jest większy od każdego z trzech kątów wewnętrznych nieprzyległych.

Czy twierdzenie byłoby prawdziwe, gdybyśmy zamiast prostopadłej DE poprowadzili pochyłą?

9. Wzorując się na § 64, dowieść następującej cechy równości trójkątów prostokątnych: dwa trójkąty prostokątne są sobie równe, jeżeli przyprostokątna i przeciwległy jej kąt ostry jednego trójkąta równają się przyprostokątnej i przeciwległemu kątowi ostremu drugiego trójkąta.

10. Wzorując się na § 64, dowieść następującej cechy równości trójkątów prostokątnych: dwa trójkąty prostokątne są sobie równe, jeżeli przeciwprostokątna i kąt ostry jednego trójkąta równają się przeciwprostokątnej i kątowi ostremu drugiego trójkąta. [Wskazówka: jeżeli $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, kąty zaś $\sphericalangle C, \sphericalangle C'$ są proste i jeżeli zestawiamy trójkąty tak, by otrzymać trójkąt równoramienny $\triangle BAB'$, wówczas należy dowieść przedewszystkim, że boki a i a' muszą leżeć na jednej prostej].

11. W trójkącie równoramiennym wysokości, poprowadzone do równych boków, są sobie równe.

12. Jeżeli dwie wysokości trójkąta są sobie równe, wówczas trójkąt jest równoramienny, a mianowicie równają się sobie boki, do których te wysokości zostały poprowadzone.

Zbudować trójkąt prostokątny $\triangle ABC$, mając dane*):

13. A, r_b . 14. a, d_C . 15. A, d_A . 16. b, s_a .

Dowieść równości dwóch trójkątów $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$, w których wymienione poniżej odcinki i kąty jednego trójkąta równają się odpowiednim odcinkom i kątom drugiego.*)

17. a, h_a, B . 18. A, B, h_c . 19. A, B, h_a .
20. a, h_b, h_c . 21. a, h_a, s_a . 22. $a, s_a, \sphericalangle(s_a, h_a)$.
23. $r_a, h_c, \sphericalangle(s_c, a)$. 24. $C, d_C, \sphericalangle(h_c, b)$.

ROZDZIAŁ IV.

O nierównych elementach w trójkącie.

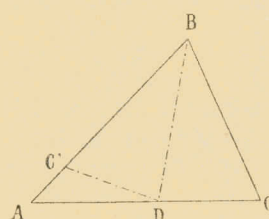
§ 65. Twierdzenie. Jeżeli dwa boki trójkąta nie równają się sobie, wówczas kąt przeciwległy większemu bokowi jest większy.

Niech będzie dany $\triangle ABC$, w którym

*) Co się tyczy symbolów, porów. spisy I i III na str. 2 i 3.

$$AB > BC.$$

powiadam, że musi być $\sphericalangle C > \sphericalangle A$.



Rys. 33.

Zastosujemy tę samą metodę, za pomocą której dowiedliśmy w § 50, że kąty przeciwległe równym bokom są sobie równe. Poprowadzimy mianowicie w kącie $\sphericalangle B$ dwusieczną BD , odłożymy odcinek $BC' = BC$, wreszcie połączymy C' z D (*). W ten sposób mamy równe

$$\triangle BC'D \equiv \triangle BCD,$$

wobec czego $\sphericalangle BC'D = \sphericalangle BCD$,

Ale $\sphericalangle BC'D > \sphericalangle BAC$ (§ 62 str. 44), a więc

musi być $\sphericalangle BCD > \sphericalangle BAC$.

§ 66. Twierdzenie odwrotne (względem § 65). *Jeżeli dwa kąty trójkąta nie równają się sobie, wówczas bok przeciwległy większemu kątowi jest większy.*

Niech będzie dany $\triangle ABC$, w którym $\sphericalangle A > \sphericalangle B$; powiadam, że musi być $a > b$.

Zastosujemy metodę sprowadzenia do niedorzeczności. Gdyby bok a nie był większy od boku b , wówczas musiałoby być jedno z dwojga:

albo $a = b$, albo $a < b$,

W pierwszym przypadku trójkąt $\triangle ABC$ byłby równoramienny, co przeczyłoby założeniu, że $\sphericalangle A > \sphericalangle B$. W drugim przypadku mielibyśmy na mocy poprzedniego twierdzenia nierówność $\sphericalangle A < \sphericalangle B$, co znów przeczy założeniu twierdzenia.

Wobec tego musimy uznać, że istotnie $a > b$.

§ 67. Dwa twierdzenia nazywamy *przeciwnymi* sobie, jeżeli założenie i wniosek jednego z nich są zaprzeczeniem założenia i wniosku drugiego twierdzenia.

Np. z twierdzenia:

„jeżeli trzy boki jednego trójkąta równają się trzem bokom drugiego, wówczas i kąty ich są sobie równe”,

*) Gdybyśmy mieli do czynienia z figurą materjalną, powiedzieliśmy, że przełamujemy trójkąt $\triangle ABC$ wzdłuż dwusiecznej BD , wskutek czego trójkąt $\triangle BCD$ przybiera położenie $BC'D$.

utworzyć można twierdzenie przeciwne:

„jeżeli trzy boki jednego trójkąta *nie* równają się trzem bokom drugiego, wówczas i kąty ich *nie* są sobie równe”.

Widzimy na tym przykładzie, że twierdzenie przeciwne może być fałszywe, mimo że twierdzenie proste było prawdziwe.

Między twierdzeniem odwrotnym a przeciwnym zachodzi bliski związek, który najlepiej wyjaśnimy sobie na przykładzie.

Z twierdzenia prostego (ćwiczenie VII, 11, str. 47):

„jeżeli dwa boki trójkąta równają się sobie, wówczas wysokości do nich poprowadzone równają się sobie”, tworzymy

twierdzenie o d w r o t n e (ćwiczenie VII, 12):

„jeżeli dwie wysokości trójkąta równają się sobie, wówczas boki, do których wysokości zostały poprowadzone, równają się sobie”,

jak również twierdzenie p r z e c i w n e:

„jeżeli dwa boki trójkąta *nie* równają się sobie, wówczas wysokości do nich poprowadzone *nie* równają się sobie”,

oraz twierdzenie o d w r o t n e d o p r z e c i w n e g o:

„jeżeli dwie wysokości trójkąta *nie* równają się sobie, wówczas i boki, do których one zostały poprowadzone *nie* są sobie równe”.

Wypiszmy te cztery twierdzenia w postaci następującego schematu, łatwego do zapamiętania:



Twierdzenia, połączone w tym schemacie kreskami, są zawsze jednocześnie prawdziwe lub też jednocześnie fałszywe. W szczególności możemy wypowiedzieć następującą bardzo ważną zasadę:

Zasada I. *Twierdzenia: odwrotne i przeciwne są albo oba prawdziwe, albo oba fałszywe.*

Istotnie, jeżeli np. z równości dwóch wysokości wynika równość dwóch boków trójkąta, wówczas trójkąt nie mający równych boków nie może też mieć równych wysokości.

Wobec tego, skoro tylko twierdzenie proste zostało dowiedzione, możemy badać dowolnie czy to twierdzenie przeciwne, czy odwrotne; z prawdziwości lub mylności jednego z nich wyniknie prawdziwość lub mylność drugiego.

Powyższą zasadę można uogólnić w następujący sposób:

Zasada II. *Dajmy na to, że o jakimś przedmiocie uczynić możemy trzy przypuszczenia, które się nawzajem wyłączają, i że z tych trzech przy-*

puszczeń wypływają trzy wnioski, które również wyłączają się wzajemnie; jeżeli te dwa warunki są spełnione, wówczas wszystkie te trzy twierdzenia możemy odwrócić.

Np. w §§ 49, 65 poznaliśmy następujące twierdzenia:

jeżeli	$a = b$	,	to	$\sphericalangle A = \sphericalangle B$,
„	$a > b$	,	to	$\sphericalangle A > \sphericalangle B$
„	$a < b$	,	to	$\sphericalangle A < \sphericalangle B$.

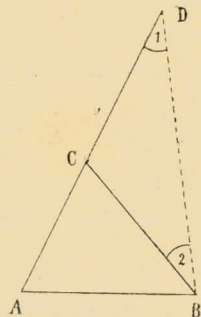
Założenia tych twierdzeń wyłączają się wzajemnie; to samo powiedzieć można o wnioskach, a więc twierdzenia możemy odwrócić, czyli musi być prawdą, że

jeżeli	$\sphericalangle A = \sphericalangle B$	,	to	$a = b$,
„	$\sphericalangle A > \sphericalangle B$	,	to	$a > b$,
„	$\sphericalangle A < \sphericalangle B$	,	to	$a < b$.

Jak widzimy, opierając się na tej zasadzie można było nie podawać specjalnego dowodu prawdziwości twierdzeń §§ 61 i 66.

Oczywista rzecz, że zasada powyższa pozostanie słuszną, jeżeli zamiast trzech wyłączających się twierdzeń, można o jakimś przedmiocie wypowiedzieć 4, 5, 6... takich twierdzeń.*)

§ 68. Twierdzenie. Suma dwu boków trójkąta jest większa od trzeciego boku, różnica zaś jest mniejsza od trzeciego boku.



Rys. 34.

Niech będzie dany $\triangle ABC$ i niech AB będzie największym jego bokiem; powiadam, że suma $AC + CB$ jest większa od AB .

Aby się o tym przekonać, wprowadzamy do rysunku sumę boków $AC + CB$, mianowicie na przedłużeniu boku AC odkładamy odcinek $CD = CB$.

W ten sposób mamy $AD = AC + CB$.

Pozostaje wykazać, że $AD > AB$.

W tym celu zwróćmy uwagę na to, że trójkąt $\triangle CBD$ jest równoramienny, a mianowicie $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$; wobec tego w trójkącie

$\triangle ADB$ zachodzi nierówność $\sphericalangle ABD > \sphericalangle ADB$,

zatem

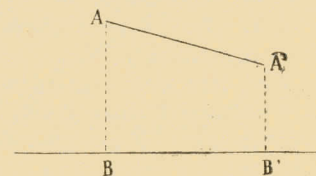
$$AD > AB.$$

*) Układ twierdzeń, spełniających warunki w tej zasadzie wyrażone, nazywa się zwykle *układem zamkniętym*.

Drugiej części twierdzenia czytelnik dowiedzie sam, wprowadzając do rysunku różnicę dwóch boków trójkąta i opierając się na tw. §§ 49 i 21, Wniosek.

§ 69. Określenie. Rzutem punktu na daną prostą nazywamy spodek prostopadłej, poprowadzonej z tego punktu do prostej.

Rzutem odcinka AA' na daną prostą nazywamy odcinek BB' , zawarty między rzutami punktów A, A' na tę prostą (zwaną *osią rzutów*).



Rys. 35.

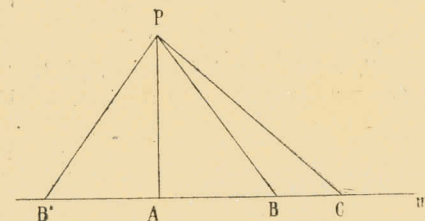
§ 70. Twierdzenie. Jeżeli z punktu zewnętrznego poprowadzono do prostej wszelkie możliwe odcinki, wówczas

- 1) odcinek prostopadły jest najmniejszy,
- 2) dwa odcinki pochyłe są sobie równe, jeżeli mają równe rzuty,
- 3) z dwóch nierównych odcinków pochyłych ten jest większy, który ma większy rzut.

Niech będzie dana prosta m i punkt zewnętrzny P .

I. Jeżeli PA jest prostopadłą, wówczas w trójkącie $\triangle PAB$ musi być $PB > PA$, gdyż bok PA leży naprzeciwko kąta ostrego, bok zaś PB naprzeciw kąta prostego (§ 62, Wniosek).

II. Jeżeli na tym rysunku mamy $BA = B'A$, wówczas pochyłe PB, PB' równają się sobie, gdyż trójkąt $\triangle PBB'$ jest równoramienny (§ 60).



Rys. 36.

III. Jeżeli wreszcie mamy $AC > AB$, wówczas musi być również $PC > PB$. W rzeczy samej, w trójkącie $\triangle PAB$ kąt wewnętrzny $\sphericalangle PAB$ jest mniejszy od zewnętrznego $\sphericalangle PBC$, a więc kąt $\sphericalangle PBC$ musi być rozwarty. Wobec tego w trójkącie $\triangle PBC$ bok PC , jako przeciwległy kątowi rozwartemu, musi być większy od boku PB , przeciwległego kątowi ostremu (§ 62, Wniosek).

§ 71. Określenie. Odległością punktu od prostej nazywamy prostopadłą, poprowadzoną z tego punktu do prostej.

Ćwiczenia VIII. 1. Dowieść twierdzenia, że suma dwóch boków trójkąta jest większa od trzeciego, nie przedłużając boku trójkąta. Należy mianowicie w tym celu

- albo wykreślić wysokość,
- albo wykreślić dwusieczną.

2. Jeżeli w trójkącie równobocznym $\triangle MKL$, połączyliśmy K z dowolnym punktem N na boku ML , wówczas odcinek KN jest mniejszy od KM , lecz większy zarówno od MN , jak od NL .

3. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ oznaczymy przez s_c środkową, poprowadzoną do boku c , wówczas muszą zachodzić dwie następujące nierówności:

$$a + b - c < 2s_c < a + b.$$

4. W każdym trójkącie $\triangle ABC$ zachodzą dwie nierówności:

$$\frac{a + b + c}{2} < s_a + s_b + s_c < a + b + c.$$

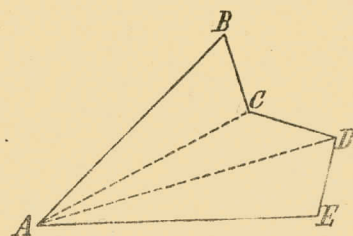
5. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ dowolny punkt wewnętrzny M połączymy z A i z B , wówczas musi być

$$MA + MB < a + b.$$

6. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ dowolny punkt wewnętrzny M połączymy z trzema wierzchołkami, wówczas musi być

$$\frac{a + b + c}{2} < MA + MB + MC < a + b + c.$$

7. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ mamy $a > b$, wówczas wysokość h_c tworzy większy kąt z bokiem a , niż z bokiem b .



Rys. 37.

8. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ mamy $a > b$, wówczas środkowa s_c tworzy większy kąt z bokiem b , niż z bokiem a . [Wskazówka: na przedłużeniu środkowej odkładamy równy jej odcinek].

9. Mamy, jak w dwóch poprzednich zadaniach, $a > b$; wymienić porządek, w którym następują po sobie na rysunku odcinki a, b, s_c, h_c, d_c .

10. Z punktu zewnętrznego A poprowadzono do prostej m prostopadłą AB oraz pochyłe $AC, AD, AE, \dots$, których długości rosną wciąż o stały odcinek. Dowieść, że odcinki $BC, CD, DE, \dots$ maleją. [Wskazówka: zwrócić uwagę na to, że $AC = \frac{1}{2}(AB + AD)$, następnie

poprowadzić w $\triangle ABD$ środkową AK i oprzeć się na drugiej nierówności, dowiedzionej powyżej w ćwiczeniu 3-im].

11. Dowieść, że jeżeli dwa trójkąty prostokątne $ABC, A'B'C'$ mają równe przeciwprostokątne $c = c'$ ale między przyprostokątnymi zachodzi nierówność $a < a'$, wówczas musi być $b > b'$. [Wskazówka: po drugiej stronie przeciwprostokątnej AB budujemy $\triangle ABC'' \equiv \triangle A'B'C'$ i łączymy punkty C'' i C^*].

12. Jeżeli jedna przyprostokątna trójkąta pozostaje stała, druga zaś rośnie, wówczas i przeciwprostokątna rośnie.

13. Jeżeli jedna przyprostokątna pozostaje stała, lecz przeciwprostokątna rośnie, wówczas i druga przyprostokątna rośnie.

14. Wykazać, że w § 70 mamy właściwie nie jedno twierdzenie, lecz układ zamknięty twierdzeń (porów. odsyłacz na str. 50) i że z tym wszystkie twierdzenia tego układu mamy prawo odwrócić.

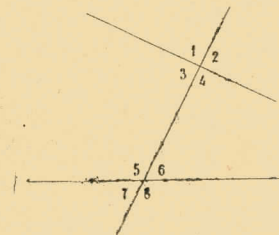
15. Każdy bok wielokąta jest mniejszy od sumy pozostałych boków (rys. 37).

ROZDZIAŁ V.

Teoria równoległych.

A. O prostych równoległych.

§ 72. Jeżeli dwie jakiegokolwiek proste leżące w jednej płaszczyźnie przetniemy trzecią prostą, otrzymamy ośm kątów, które w dalszych rozważaniach będziemy grupowali parami, nadając im następujące nazwy:



Rys. 38.

kąty 3 i 6 lub 4 i 5 nazywają się *naprzemianległe wewnętrzne*;

„ 1 i 8 lub 2 i 7 „ „ *naprzemianległe zewnętrzne*;

„ 1 i 5, 3 i 7, 2 i 6 lub 4 i 8 „ *odpowiadające sobie*;

„ 3 i 5 lub 4 i 6 „ „ *jednostronne wewnętrzne*;

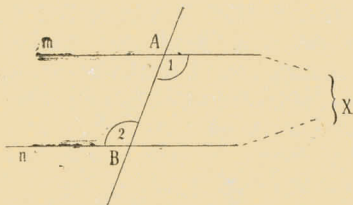
„ 1 i 7 lub 2 i 8 „ „ *jednostronne zewnętrzne*.

*) Twierdzenie to można wysłowić inaczej, mianowicie: jeżeli w trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna pozostaje stała, lecz jedna z przyprostokątnych rośnie, wówczas druga maleje.

§ 72. Określenie. Dwie proste, leżące w jednej płaszczyźnie i nie przecinające się, nazywamy równoległymi.

Chcąc zaznaczyć, że proste AB , CD są do siebie równoległe, piszemy $AB \parallel CD$.

§ 73. Twierdzenie. Dwie proste, które z trzecią prostą tworzą kąty naprzemianległe wewnętrzne równe, są do siebie równoległe. *)



Rys. 39.

Przypuśćmy, że proste dane m , n tworzą z trzecią prostą AB kąty naprzemianległe wewnętrzne równe, a mianowicie

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2.$$

Powiadam, że proste m , n nie mogą przeciąć się. Istotnie, gdyby proste te spotkały się np. po prawej stronie poprzecznej AB w punkcie X , wówczas powstałby trójkąt $\triangle AXB$, w którym kąt $\sphericalangle 2$ byłby zewnętrzny, kąt zaś $\sphericalangle 1$ byłby wewnętrzny, nieprzyległy do kąta $\sphericalangle 2$. Wobec tego, kąt $\sphericalangle 2$ powinienby być większy od kąta $\sphericalangle 1$, co przeczy założeniu, że kąty te równają się sobie.

Wnioski. 1. Jeżeli dwie proste, przecięte trzecią, tworzą kąty odpowiadające sobie równe, albo kąty naprzemianległe zewnętrzne równe, wówczas proste są do siebie równoległe.

2. Jeżeli dwie proste zostały przecięte trzecią tak, że kąty jednostronne wewnętrzne (lub zewnętrzne) spełniają się, wówczas proste te są do siebie równoległe.

3. Dwie proste, prostopadłe do tej samej trzeciej prostej, są do siebie równoległe.

*) Jeżeli określamy jakieś nowe pojęcie, winniśmy zawsze wykazać, że nie jest ono pustym dźwiękiem, że naprawdę istnieje przedmiot, o którym mowa w określeniu. W danym wypadku powinniśmy wykazać, że naprawdę istnieją proste, które nie przecinają się, mimo że leżą w jednej płaszczyźnie. Otóż najłatwiej przeprowadzimy dowód istnienia figury, jeżeli pokażemy, w jaki sposób figurę tę można zbudować. Taki właśnie jest sens niniejszego twierdzenia: wskazuje ono sposób zbudowania dwóch prostych równoległych i przez to samo stanowi dowód istnienia takich prostych.

§ 74. Wiemy już, iż po ustaleniu jakiegoś twierdzenia, należy zbadać twierdzenie odwrotne (lub przeciwne), gdyż zdarza się, że są one błędne, mimo że twierdzenie proste było prawdziwe. Otóż w danym wypadku bliższe badanie wykazało, że twierdzenia przeciwnego (ani odwrotnego) do twierdzenia § 73 dowieść nie można, mimo że prawdziwość jego jest dla każdego oczywista. Wobec tego nic innego nie pozostaje, jak uznać za pewnik owo twierdzenie przeciwne.

Pewnik IV. (zwany pewnikiem Euklidesa*). Jeżeli dwie proste tworzą z poprzeczną kąty naprzemianległe wewnętrzne nierówne, wówczas proste te nie są do siebie równoległe. (zatym przecinają się).

§ 75. Twierdzenie. Przez dany punkt można poprowadzić jedną tylko równoległą do danej prostej.

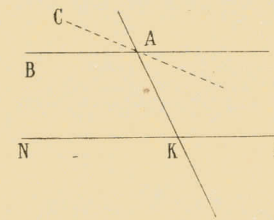
Jakoż przypuśćmy, że przez punkt A przechodzi prosta AB równoległa do danej prostej MN . Jeżeli poprowadzimy poprzeczną AK , wówczas na mocy powyższego pewnika musi być

$$\sphericalangle BAK = \sphericalangle MKA.$$

Gdyby jakakolwiek inna prosta, przechodząca przez ten sam punkt A , np. prosta CA była równoległa do MN , wówczas mielibyśmy na tej samej zasadzie równość

$$\sphericalangle CAK = \sphericalangle MKA.$$

Ale te dwie równości nie mogą być jednocześnie prawdziwe, gdyż kąty $\sphericalangle CAK$, $\sphericalangle BAK$ nie są sobie równe.



Rys. 40.

*) Od imienia słynnego matematyka greckiego, który nauczał w Aleksandrii około 300 r. przed Chr. Dzieło Euklidesa p. t. *Στοιχεία* czyli „Elementy” stanowi najdawniejszy ze znanych nam podręczników naukowych geometrii. U Euklidesa pewnik powyższy brzmi nieco inaczej, mianowicie uznaje on za pewnik twierdzenie przeciwne do wniosku 2-go w § 73 i powiada: jeżeli dwie proste tworzą z trzecią prostą kąty jednostronne wewnętrzne, których suma nie równa się kątowi półpełnemu, wówczas proste te przecinają się, a mianowicie przecinają się po tej stronie poprzecznej, po której suma kątów jednostronnych wewnętrznych jest mniejsza od kąta półpełnego.

Wnioski. 1. Jeżeli prosta przecina jedną z dwóch równoległych, wówczas przecina i drugą.

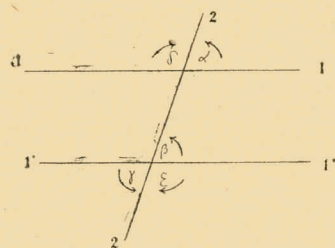
Istotnie, jeżeli mamy dane dwie równoległe m, n i jeżeli prosta p przecina prostą m w punkcie A , wówczas musi przecinać i prostą n , gdyż w przeciwnym razie byłaby równoległa do n , a więc — wbrew powyższemu twierdzeniu — przez punkt A przechodziłyby dwie proste m, p równoległe do n .

2. Dwie proste, równoległe do tej samej trzeciej prostej, są do siebie równoległe.

Jeżeli proste m, n są równoległe do prostej p , wówczas są do siebie równoległe, gdyby bowiem przecinały się w jakimś punkcie X , wówczas przez punkt X przechodziłyby dwie proste równoległe do p .

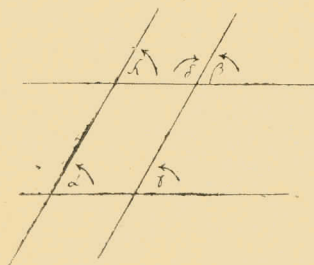
3. Poprzeczna, prostopadła do jednej z dwu prostych równoległych, jest prostopadła i do drugiej.

§ 76. Twierdzenie. Jeżeli ramiona jednego kąta są równoległe do ramion drugiego, wówczas kąty te równają się sobie, o ile mają ten sam zwrot, natomiast kąty spełniają się, o ile mają zwroty przeciwne.



Rys. 41.

o równoległych ramionach tak są położone, że na pewnej prostej leży jedno ramie pierwszego kąta i jedno ramie drugiego.



Rys. 42.

W celu rozpoznania zwrotu kątów ponumerujemy ich ramiona.

Przedewszystkiem zauważmy, że jeżeli dwie równoległe, oznaczone na rysunku numerami 1 i 1', zostały przecięte trzecią prostą, którą oznaczmy numerem 2, wówczas kąty równe α, β, γ , mają wszystkie ten sam zwrot, natomiast spełniające się z nimi kąty, jak δ, ϵ mają zwrot przeciwny. Twierdzenie zatym jest dowiedzione w przypadku, gdy dwa kąty

Przypadek ogólny da się sprowadzić do poprzedniego.

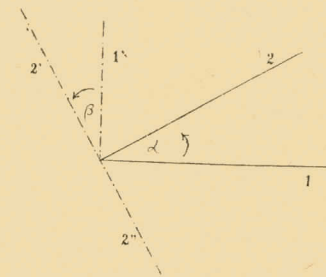
Jeżeli mamy dane (rys. 42) kąty α, β o tym samym zwrocie i równoległych ramionach, wówczas możemy którykolwiek z nich zastąpić przez równy mu kąt γ , mający ten sam zwrot, a wówczas stanie się oczywistym, że $\alpha = \gamma = \beta$.

Jeżeli chodzi o porównanie kątów α i δ , mających zwroty prze-

ciwne, wówczas zastępujemy α przez równy mu kąt λ , mający z nim ten sam zwrot.

§ 77. Twierdzenie. Jeżeli ramiona jednego kąta są prostopadłe do ramion drugiego, przyczem kąty mają ten sam zwrot, wówczas kąty równają się sobie; jeżeli natomiast kąty mają zwroty przeciwne, wówczas spełniają się.

Wystarczy zbadać przypadek, gdy dwa kąty o ramionach odpowiednio do siebie prostopadłych mają wspólny wierzchołek. Istotnie, gdyby chodziło o kąty α, γ nie mające wspólnego wierzchołka, wówczas przy wierzchołku kąta α zbudowalibyśmy β o ramionach równoległych do ramion kąta γ i mający z nim wspólny zwrot; na mocy poprzedniego twierdzenia mielibyśmy $\beta = \gamma$.



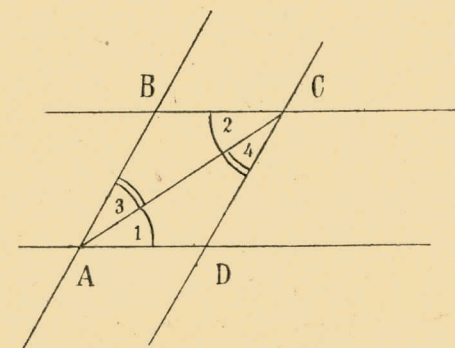
Rys. 43.

Szczegółowy dowód pozostawiamy czytelnikowi. Zauważmy tylko, że kąty α i β , których ramiona oznaczyliśmy numerami 1, 2 oraz 1', 2', mają ten sam zwrot, natomiast kąt, którego ramionami są półproste 1' i 2'', ma zwrot przeciwny.

§ 78. Twierdzenie. Odcinki równoległe, zawarte między prostymi równoległymi, są sobie równe.

Jeżeli mamy $AB \parallel CD$ oraz $BC \parallel AD$, wówczas musi być $AB = CD$.

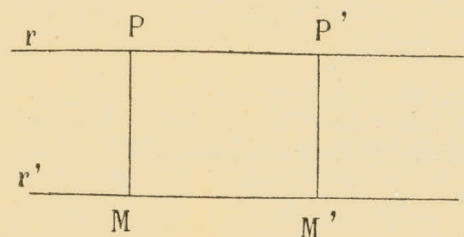
Jakoż łącząc A z C , otrzymujemy dwa trójkąty $\triangle ABC, \triangle ADC$, które równają się sobie, ponieważ $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, bok zaś AC mają wspólny.



Rys. 44.

Wnioski. Jeżeli mamy dane dwie proste równoległe, wówczas

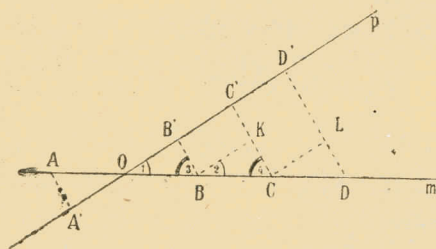
1. Wszystkie punkty jednej prostej są równoodległe od drugiej (np. na rys. 45 $PM = P'M'$, gdzie P, P' są dowolnymi punktami na prostej r);



Rys. 45.

głość punktu M od prostej r).

§ 79. Twierdzenie. Jeżeli na jednej z dwu przecinających się prostych odłożymy, poczynając od ich punktu przecięcia, dowolną ilość równych odcinków i przez końce tych odcinków poprowadzimy równoległe, wówczas na drugiej prostej otrzymamy tyleż równych sobie odcinków.



Rys. 46.

Aby tego dowieść, wystarczy przez punkty $B, C, \dots$ poprowadzić odcinki $BK, CL, \dots$ równoległe do prostej p , przez co otrzymamy szereg równych trójkątów

$$\triangle OAA' = \triangle OBB' = \triangle BKC = \triangle CLD = \dots,$$

Istotnie, np.: $OB = BC$, $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ i $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$, jako odpowiadające sobie, a więc $\triangle OBB' = \triangle BKC$. Stąd wynika, że $OB' = BK = B'C'$, (na mocy § 78).

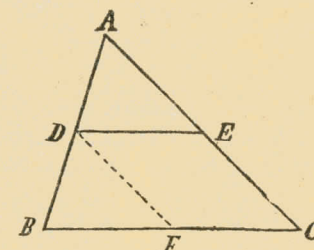
W taki sam sposób dowodzimy równości innych odcinków.

Wnioski. 1. Jeżeli przez środek D boku AB trójkąta poprowadzimy równoległą do boku BC , przejdzie ona przez środek E boku AC , przyczym odcinek DE równać się będzie połowie boku BC (rys. 47).

zastosuj § 79

2. Odległość punktów pierwszej prostej od drugiej równa się odległości punktów drugiej prostej od pierwszej (gdyż np. odcinek PM może być uważany za odległość punktu P od prostej r' lub też za odległość punktu M od prostej r).

Ponieważ przez punkt D możemy poprowadzić tylko jedną równoległą do BC i ponieważ istnieje jeden tylko środek boku AC , zatem równoległa, o której mowa w powyższym wniosku, jest tożsą z prostą, łączącą środki D, E boków trójkąta. To daje nam możliwość odwrócenia powyższego twierdzenia. Mamy więc:

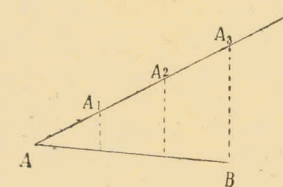


Rys. 47.

2. Odcinek, łączący środki dwóch boków trójkąta, jest równoległy do trzeciego boku i równa się jego połowie.

§ 80. Zadanie. Dany odcinek podzielić na jakąkolwiek z góry zadaną ilość części równych.

Jeżeli np. chcemy podzielić odcinek AB na trzy równe części, poprowadzimy przez A dowolną prostą, na niej odłóżmy trzy dowolne, byle równe sobie odcinki $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, łączymy A_3 z B , przez punkty zaś A_1 i A_2 poprowadzimy równoległe do prostej A_3B .



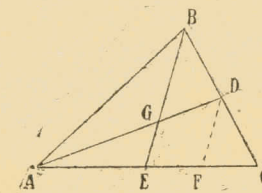
Rys. 48.

§ 81. Twierdzenie. Trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie tak, że odcinek między wierzchołkiem a punktem przecięcia jest dwa razy większy od odcinka między tym punktem a bokiem trójkąta.

Niech będzie dany $\triangle ABC$ i dwie jego środkowe AD, BE . Proste te niewątpliwie przecinają się, gdyż pierwsza z nich łączy dwa punkty A, D leżące po dwóch stronach drugiej prostej. Oznaczmy przez G ich punkt przecięcia i poprowadźmy prostą $DF \parallel BE$. Ponieważ w $\triangle EBC$ punkt D jest środkiem boku BC , zatem F musi być środkiem boku EC . Mamy tedy

$$EF = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}AE,$$

a wobec tego musi być również $GD = \frac{1}{2}AG$ (§ 79).

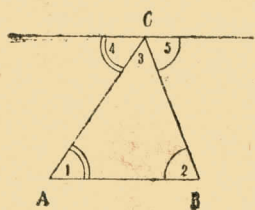


Rys. 49.

Jeżeli teraz wykreślimy trzecią środkową (której brak na rysunku), podzieli ona środkową AD na dwa odcinki, z których jeden, zawarty między wierzchołkiem A i punktem przecięcia, musi być dwa razy większy od drugiego. Ponieważ istnieje tylko jeden punkt G , dzielący w ten sposób środkową AD , zatem wszystkie trzy środkowe spotykają się w punkcie G .

Punkt G nazywa się *środkiem ciężkości trójkąta*.

§ 82. Twierdzenie. Suma kątów wewnętrznych trójkąta równa się dwóm kątom prostym.



Rys. 50.

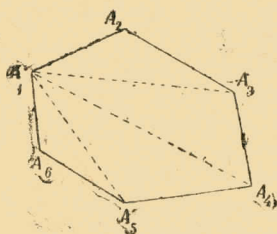
Przez wierzchołek C trójkąta $\triangle ABC$ prowadzimy prostą CD równoległą do boku AB . Mamy wówczas

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 4, \quad \sphericalangle 2 = \sphericalangle 5,$$

$$\text{a więc } \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 5 = \text{kątowi półpełnemu.}$$

Wniosek. Kąt zewnętrzny trójkąta równa się sumie dwóch kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych.

§ 83. Twierdzenie. Suma kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego wyraża się wzorem $2\delta (n-2)$, gdzie δ oznacza kąt prosty, n zaś liczbę boków wielokąta.



Rys. 51.

Jeżeli wielokąt ma n boków (a więc i n wierzchołków), wówczas z dowolnego wierzchołka można poprowadzić $n-3$ przekątne, które dzielą wielokąt na $n-2$ trójkąty. Suma kątów każdego z tych trójkątów równa się 2δ , a więc suma kątów wewnętrznych wielokąta $= 2\delta (n-2)$.

Wniosek. Jeżeli przy każdym wierzchołku wielokąta wypukłego utworzymy po jednym kącie zewnętrznym, wówczas suma wszystkich tych kątów $= 4\delta$ bez względu na to, ile boków ma wielokąt.

Ćwiczenia IX. 1. Jeżeli kąty naprzemianległe wewnętrzne są sobie równe, wówczas a) kąty naprzemianległe zewnętrzne równają się

sobie, b) kąty odpowiadające równają się sobie, c) kąty jednostronne (zarówno wewnętrzne, jak zewnętrzne) spełniają się.

2. Jeżeli kąty jednostronne wewnętrzne lub zewnętrzne spełniają się, wówczas kąty naprzemianległe wewnętrzne są sobie równe.

3. Przez punkt A poprowadzić równoległą do danej prostej m , posługując się własnościami: 1-o kątów naprzemianległych wewnętrznych, 2-o naprzemianległych zewnętrznych, 3-o odpowiadających sobie.

4. Jeżeli w kątach przyległych $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle DBC$ poprowadzono dwusieczne i jeżeli prosta, równoległa do AD przecina te dwusieczne odpowiednio w punktach E, F , ramię zaś BC przecina w punkcie K , wówczas musi być $EK = KF$.

5. Jeżeli przez punkt W , w którym przecinają się dwusieczne kątów $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ trójkąta $\triangle ABC$, poprowadzimy równoległą do boku AB i jeżeli równoległa ta przetnie boki AC , BC odpowiednio w punktach M , N , wówczas $MN = AM + BN$.

Czy twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeżeli równoległą poprowadziliśmy przez punkt przecięcia się dwusiecznych kątów zewnętrznych?

6. Czy można odwrócić (i na ile sposobów) twierdzenie, zawarte w poprzednim ćwiczeniu?

7. W trójkącie ABC dwusieczna kąta $\sphericalangle B$ przecina bok AC w punkcie B' ; jeżeli przez B' poprowadzimy równoległą do BC , przecinającą bok AB w punkcie C' , wówczas $B'C' = BC'$.

8. W trójkącie ABC poprowadzić odcinek $B_1C_1 \parallel BC$ tak, by jego końce B_1 , C_1 leżały odpowiednio na bokach AB , AC i żeby było:

$$1\text{-o } B_1C_1 = B_1B; \quad 2\text{-o } B_1C_1 = C_1C; \quad 3\text{-o } B_1C_1 = B_1B + C_1C;$$

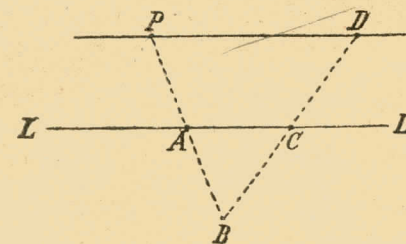
$$4\text{-o } B_1C_1 = B_1B - C_1C.$$

9. Opierając się na własności kątów odpowiadających sobie, dowieść, że dwie proste równoległe do trzeciej prostej są do siebie równoległe.

10. Jeżeli końce odcinka AB leżą na dwóch równoległych prostych i jeżeli przez środek O tego odcinka poprowadzimy dowolny odcinek CD , którego końce leżą na tych samych równoległych, wówczas musi być $CO = OD$.

11. Jeżeli rzuty dwu równych odcinków na tę samą prostą m są sobie równe, wówczas odcinki te albo leżą na jednej prostej, albo też są do siebie równoległe.

12. Matematyk włoski XVI w. N. Tartaglia podaje następujący sposób kreślenia równoległych: jeżeli do prostej danej LL' (rys. 52) chcemy przez P po-



Rys. 52.

prorowadzić równoległą, wówczas poprowadzimy dowolną poprzeczną PA , odkładamy $AB = PA$, łączymy B z dowolnym punktem C na prostej LL' , wreszcie na prostej BC odkładamy $CD = BC$; prosta PD jest żądaną równoległą. Dlaczego?

13. Dowieść, że dany odcinek MN można w następujący sposób podzielić na trzy części równe: na MN budujemy trójkąt równoboczny $\triangle MNP$, poprowadzimy dwusieczne kątów $\sphericalangle M$, $\sphericalangle N$, przecinające się w punkcie I ; przez I poprowadzimy równoległe do boków PM , PN . Równoległe te dzielą bok MN na trzy części równe.

14. Jeżeli w trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$ (w którym $AB = AC$) poprowadzimy z dowolnego punktu M podstawy równoległą do boków AB , AC , i jeżeli proste te przecinają boki AB , AC odpowiednio w punktach N , P , wówczas suma odcinków $MN + MP$ jest wielkością stałą.

Jakiej zmianie ulegnie powyższe twierdzenie, jeżeli punkt M , poruszając się po prostej BC , znajdzie się w jednym z wierzchołków B lub C ? Jeżeli M znajdzie się na przedłużeniu boku BC ?

15. Dany kąt $\sphericalangle \alpha$ i punkt A wewnątrz niego leżący; poprowadzić przez A prostą tak, by punkt A był środkiem odcinka tej prostej, zawartego między ramionami kąta $\sphericalangle \alpha$.

16. Dany kąt $\sphericalangle \alpha$ i punkt A zewnątrz niego leżący; przez A poprowadzić prostą, przecinającą ramiona kąta w punktach M , N tak, że $AM = MN$.

17. Jeżeli z punktu, obranego dowolnie na boku trójkąta równobocznego, poprowadzimy prostopadłe do dwu drugich boków, wówczas suma ich równa się wysokości trójkąta.

18. Uogólnić poprzednie twierdzenie, obierając punkt wewnątrz trójkąta równobocznego i prowadząc prostopadłe do wszystkich boków.

Jak należy zmienić wysłowienie twierdzenia (albo jaką wprowadzić umowę), żeby pozostało ono prawdziwe nawet i wówczas, gdy punkt został obrany zewnątrz trójkąta?

19. W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$, w którym $AB = AC$, łączymy dowolny punkt D , leżący na boku AC , z wierzchołkiem B i przez środek F odcinka BD poprowadzimy równoległą do BC . Jeżeli równoległa ta przecina boki AB , AC w punktach G , H , wówczas $GH = BD_1$, gdzie D_1 jest spodkiem prostopadłej, poprowadzonej z D do BC . [Wskazać: poprowadzimy $DE \parallel CB$ i dowodzimy, że $BD_1 = \frac{1}{2}(ED + BC)$].

20. Dowieść, że chcąc dany odcinek AB podzielić na n równych części, możemy postąpić w następujący sposób: poprowadzimy równoległą do AB , na niej odkładamy n równych (zresztą dowolnych) odcinków kolejnych, końce A' i B' pierwszego i ostatniego odcinka łączymy z punktami A i B , a punkt C , w którym przecinają się proste AA' , BB' (lub $A'B$, $B'A$), łączymy z końcami wszystkich odcinków, jakie odkładaliśmy na prostej $A'B'$. Proste, wychodzące z punktu C , podzielą odcinek dany AB na n równych części.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

21. $s_a, s_b, \sphericalangle(s_a, s_b)$. 22. $s_b, \sphericalangle(a, s_b), \sphericalangle(s_b, s_c)$.

23. Dana prosta m i punkt A , nieleżący na niej; poprowadzić przez A prostą, która by z prostą m tworzyła kąt, równy danemu kątowi $\sphericalangle \alpha$.

24. Mając dany kąt $\sphericalangle \alpha$, przeciąć go prostą równoległą do danej prostej m , przytym tak, by odcinek prostej, zawarty między ramionami kąta, równał się danemu odcinkowi AB .

24a. W szczególności dany odcinek h umieścić w danym kącie tak, by był on prostopadły do jednego ramienia i żeby oba jego końce leżały na ramionach kąta.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

25. r_a, A, B . 26. A, B, d_A . 27. A, B, h_c .
28. $r_a, h_c, \sphericalangle(s_a, c)$. 29. $A, c, \sphericalangle(s_b, b)$. 30. A, c, h_c .
31. A, r_a, h_c . 32. C, b, h_b . 33. $A, h_c, \sphericalangle(s_b, b)$.
34. $A, d_B, \sphericalangle(d_B, c)$. 35. $A, d_B, \sphericalangle(d_B, b)$. 36. C, h_b, d_C .

Zbudować trójkąt równoramienny $\triangle ABC$, mając dane:

37. C, h_a . 38. A, d_A .

Zbudować trójkąt prostokątny $\triangle ABC$, mając dane:

39. A, h . 40. $r_b, \sphericalangle(a, h)$. 41. A, d_C .

42. Czy suma dwóch kątów trójkąta może równać się trzeciemu kątowi? czy może być mniejsza od trzeciego kąta?

43. Dwusieczne kątów jednostronnych wewnętrznych są do siebie prostopadłe.

44. W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$, w którym $AB = AC$, dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku A jest równoległa do podstawy BC .

Sformułować i zbadać twierdzenie odwrotne.

45. W trójkącie prostokątnym poprowadzić przez wierzchołek kąta prostego poprzeczną tak, by podzielić dany trójkąt na dwa trójkąty równoramienne.

46. Opierając się na poprzednim zadaniu, znaleźć sposób wystawienia prostopadłej w końcu odcinka, którego nie możemy przedłużyć. (Rozwiązanie takie podał w XV w. matematyk niemiecki Regiomontanus czyli Jan Müller z Królewca we Frankonji. Porów. rozwiązanie tego samego zadania przez Herona — ćwiczenie V, 31).

47. Jak wielki jest kąt trójkąta równobocznego?

48a. Jeżeli w trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych jest dwa razy większy od drugiego, wówczas przyprostokątna przeciwległa mniejszemu kątowi jest dwa razy mniejsza od przeciwprostokątnej.

[W s k a z ó w k a: zestawić dwa trójkąty prostokątne tak, by utworzyć z nich jeden nowy trójkąt.]

48b. Sformułować i zbadać twierdzenie odwrotne do poprzedniego.

48c. Podzielić kąt prosty na trzy części równe.

48d. Jeżeli na każdym boku trójkąta równobocznego, którego bok $= a$, odłożymy w tym samym zwrocie, poczynając od wierzchołka, odcinek $= \frac{a}{3}$, wówczas otrzymamy nowy trójkąt równoboczny, którego

boki będą prostopadłe do boków danego trójkąta.

48e. W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$ prowadzimy do podstawy BC lub do jej przedłużenia taki odcinek AD , żeby było $\sphericalangle ADC = \frac{2}{3}\delta$; wykazać, że $AD = DC \pm BD$ i zbadać, kiedy mianowicie mamy sumę, kiedy zaś różnicę odcinków.

48f. Zbudować trójkąt równoboczny, mając daną jego wysokość.

50. W trójkącie $\triangle ABC$ przedłużamy bok AB poza wierzchołek B , na przedłużeniu odkładamy $BD = BC$ i łączymy C z D . Wykazać, że mamy wówczas $AD = a + c$, $\sphericalangle CDA = \frac{1}{2}\sphericalangle CBA$.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

51. $a + c$, b , A . 53. $a + c$, A , h_c . 55. $a + c$, A , oraz warunek, że $a = b$.
52. $a + c$, A , h_b . 54. $a + c$, B , h_c . 56. $a + c$, A , $\sphericalangle(d_B, b)$.

57. Na rys. 33 (str. 48) wykazać, że $AC' = c - a$, $\sphericalangle C'DA = \sphericalangle C - \sphericalangle A$.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

58. $c - a$, C , u_a . 59. u_a , u_c , $C - A$. 60. u_c , A , $c - a$.

61. Dowieść wzoru na sumę kątów wielokąta wypukłego, łącząc dowolny jego punkt wewnętrzny ze wszystkimi wierzchołkami.

62. Mamy dany trójkąt $\triangle ABC$, w którym $\sphericalangle C$ jest prosty. Nie wyjmując trójkąta z jego płaszczyzny, obracamy go dokoła wierzchołka C , dopóki przeciwprostokątna c nie przejdzie przez wierzchołek A większego z dwóch jego kątów ostrych. Oznaczmy trójkąt nasz w tym nowym położeniu symbolem $\triangle A'B'C$. Jeżeli D jest punktem przecięcia się boku a' z bokiem c , wówczas $\sphericalangle ADC = 3\sphericalangle ABC$.

63. Mając dane kąty $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ trójkąta, obliczyć kąt:

1-o między dwusiecznymi kątów $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$;

2-o między dwusiecznymi kątów zewnętrznych, utworzonych przy wierzchołkach A i B ;

3-o między dwusieczną kąta wewnętrznego $\sphericalangle A$ i dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku B ;

4-o między wysokością h_b i dwusieczną d_A ;

5-o między wysokościami h_a i h_b ;

6-o między wysokością h_b i dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku A .

64. Kąt między wysokością h_a i dwusieczną d_A równa się połowie różnicy kątów $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$.

65. Jeżeli w $\triangle ABC$ bok BC jest największy i jeżeli na nim odłożymy $BA' = BA$ oraz $CA'' = CA$, wówczas musi być $\sphericalangle A'AA'' = \frac{\sphericalangle B + \sphericalangle C}{2}$.

66. Niech będzie dany $\triangle ABC$, w którym $AB = AC$ oraz $\sphericalangle ABC = 3\sphericalangle BAC$. Jeżeli półproste BK , BL dzielą kąt $\sphericalangle ABC$ na trzy równe części, wówczas trójsieczne te wyznaczają w danym trójkącie trzy nowe trójkąty równoramienne.

67. Jeżeli w trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$, w którym $AB = AC$, mamy $\sphericalangle BAC = \frac{2}{3}\delta$, wówczas dwusieczna kąta przy podstawie dzieli trójkąt $\triangle ABC$ na dwa nowe trójkąty równoramienne.

68. Dowieść, że jeśli przyjmiemy jako pewnik, że „przez dany punkt do danej prostej można poprowadzić tylko jedną równoległą”, wówczas wyniknie z niego, że „dwie proste nie są równoległe, jeżeli tworzą z poprzeczną kąty naprzemianległe wewnętrzne nierówne”.

69. Dowieść, że jeśli przyjmiemy jako pewnik, iż „suma kątów trójkąta równa się kątowni półpełnemu”, wówczas wyniknie z niego, że „przez dany punkt do danej prostej można poprowadzić tylko jedną równoległą”. [W s k a z ó w k a: przy wierzchołku A budujemy kąty naprzemianległe wewnętrzne z kątami $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$].

B. O równoległobokach.

§ 84. W rozdziale niniejszym będzie mowa tylko o czworobokach wypukłych.

Dwa boki czworoboku, nie mające wspólnego wierzchołka, nazywamy *przeciwległymi*.

Określenia. Czworobok, którego dwa przeciwległe boki są do siebie równoległe, nazywamy *trapezem*. Dwa równoległe boki trapezu nazywamy jego *podstawami*, drugie dwa po prostu *bokami*.

Równoległobokiem nazywamy czworobok, który ma dwie pary równoległych boków.

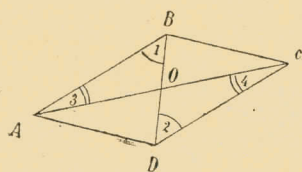
Jak widzimy, równoległobok można uważać za szczególny rodzaj trapezu.

§ 85. Twierdzenie. *Przeciwnie boki równoległoboku równają się sobie.*

Wynika odrazu z § 78.

Twierdzenie. *Przeciwnie kąty równoległoboku równają się sobie, kolejne zaś spełniają się.*

§ 86. Twierdzenie. *Przekątne równoległoboku dzielą się na połowy.*



Rys. 53.

Istotnie, $\triangle AOB \equiv \triangle COD$, ponieważ mamy

$$AB = CD, \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4.$$

Stąd wynika, że

$$AO = OC, BO = OD.$$

§ 87. Określenie. *Rombem nazywamy równoległobok, którego dwa sąsiednie boki są sobie równe.*

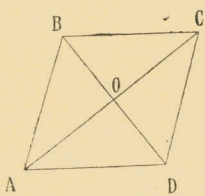
Wobec tego wszystkie boki rombu równają się sobie (dla czego?).

Twierdzenie. *Przekątne rombu*

1-o) *dzielą się na połowy,*

2-o) *są dwusiecznymi kątów rombu,*

3-o) *są do siebie prostopadłe.*



Rys. 54.

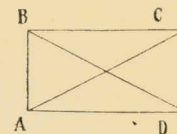
§ 88. Określenie. *Prostokątem nazywamy równoległobok, mający jeden kąt prosty.*

Wynika stąd, że wszystkie cztery kąty prostokąta równają się sobie (dla czego?).

Twierdzenie. *Przekątne prostokąta:*

1-o) *dzielą się na połowy,*

2-o) *równają się sobie.*



Rys. 55.

Pierwsza własność wynika z tego, że prostokąt jest równoległobokiem. Co się tyczy drugiej własności, to wynika ona z równości trójkątów $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$.

§ 89. Określenie. *Kwadratem nazywamy równoległobok, którego boki i kąty równają się sobie.*

Z określenia tego wynika, że kwadrat jest jednocześnie rombem i prostokątem, a więc musi posiadać wszystkie własności obu tych figur, wyliczone w §§ 87, 88.

Ćwiczenia X. 1. Sformułować i zbadać twierdzenia odwrotne względem twierdzeń §§ 85, 86. Jak stąd wynikają sposoby poznania, czy dany czworobok jest czy nie jest równoległobokiem?

2. Sformułować i zbadać twierdzenia odwrotne względem § 87. Jak poznać, czy dany równoległobok jest czy nie jest rombem?

3. Sformułować i zbadać twierdzenie odwrotne względem § 88. Jak poznać, czy dany równoległobok jest prostokątem?

4. Punkt przecięcia się przekątnych równoległoboku jest środkiem każdego odcinka, który przechodzi przez ten punkt i którego końce leżą na bokach równoległoboku (Porówn. Ćwiczenie IX 10, str. 61).

Punkt ten będziemy z tego powodu nazywali *środkiem równoległoboku*.

5. Każda prosta, przechodząca przez środek równoległoboku, dzieli równoległobok na dwie równe figury.

6. Jeżeli na dwóch przeciwnych bokach równoległoboku odłożymy, poczynając od przeciwnych wierzchołków, dwa równe sobie odcinki, wówczas prosta, łącząca końce tych odcinków, musi przejść przez środek równoległoboku.

7. Wierzchołki równoległoboku nie mieszczą się na rysunku, tak iż mamy wykreślone tylko części czterech jego boków; znaleźć środek równoległoboku.

Określenie. Jeżeli dwa wielokąty tak zostały zbudowane, że wszystkie wierzchołki jednego z nich leżą na bokach drugiego, wówczas pierwszy wielokąt nazywamy *wpisanym* w drugi, drugi zaś nazywamy *opisanym* na pierwszym.

8. W dany równoległobok wpisać dowolny równoległobok i dowieść, że mają one wspólny środek (porówn. ćwiczenie 6).

9. Środki boków każdego czworoboku są wierzchołkami równoległoboku, wpisanego w ten czworobok.

Jaką figurę otrzymamy, łącząc środki boków równoległoboku? rombu? prostokąta? kwadratu?

9a. W każdym czworokącie odcinki KL , MN , łączące środki przeciwległych boków, oraz odcinek PR , łączący środki przekątnych, przecinają się w jednym punkcie i dzielą się w tym punkcie na połowy.

10. W czworoboku $ABCD$ połączyliśmy środki boków i otrzymaliśmy prostokąt; czy można twierdzić, że $ABCD$ jest rombem?

Jeżeli środki boków czworoboku $ABCD$ tworzą romb, czy wolno twierdzić, że $ABCD$ jest prostokątem?

Jeżeli środki boków czworoboku $ABCD$ tworzą kwadrat, czy wolno twierdzić, że $ABCD$ jest kwadratem?

11. Jeżeli równoległobok dany przetniemy dwiema prostymi, równoległymi do jednej przekątnej i jednakowo od niej oddalonymi, wówczas otrzymamy nowy równoległobok, wpisany w dany i mający obwód równy sumie przekątnych równoległoboku danego.

12. Prowadzimy dwusieczne kątów wewnętrznych i zewnętrznych równoległoboku; dowieść, że: 1-o punkty przecięcia się tych dwusiecznych są wierzchołkami prostokątów; 2-o że przekątne tych prostokątów przechodzą przez środki boków równoległoboku; 3-o że przekątna większego prostokąta równa się sumie dwóch kolejnych boków równoległoboku.

Jak wielka jest przekątna mniejszego prostokąta?

13. Przez wierzchołek równoległoboku prowadzimy dowolną prostą MN , nie przecinającą równoległoboku, i z trzech pozostałych wierzchołków prowadzimy prostopadłe do tej prostej. Dowieść, że prostopadła ze środkowego wierzchołka równa się sumie dwu drugich prostopadłych.

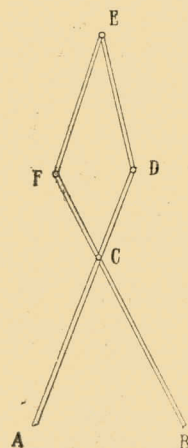
Jak zmieni się twierdzenie, jeżeli prosta MN przecina równoległobok?

14. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ poprowadzimy dwusieczną kąta A i przez punkt jej przecięcia się z bokiem a poprowadzimy równoległe do boków b , c , otrzymamy romb.

Czy można uogólnić to twierdzenie na dwusieczne kątów zewnętrznych?

15. Na każdym boku równoległoboku budujemy nazewnątrz kwadrat; dowieść, że środki tych czterech kwadratów są wierzchołkami nowego kwadratu.

16. Cztery sztywne pręty AD , FB , EF , ED osadzamy na zawiasach w punktach E , F , C , D (rys. 56). Jak należy dobrać długość prętów i gdzie umieścić zawias C , żeby przy rozsuwaniu punktów A , B



Rys. 56.

prosta FD była zawsze równoległa do AB , punkty zaś E , C żeby kreśliły prostopadłą do AB ?

17. Odcinek, łączący środki dwóch boków trapezu, jest równoległy do obu jego podstaw i równa się połowie ich sumy.

17a. Odcinek, łączący środki dwóch przekątnych trapezu, jest równoległy do obu podstaw trapezu i równa się połowie ich różnicy.

18. Jeżeli każda z przekątnych trapezu dzieli na połowy jeden jego kąt, wówczas trapez ma trzy równe sobie boki.

Zbudować równoległobok, mając dane:

- | | | |
|---|--|-------------------------------------|
| 19. e, f, ω . | 20. $a, \omega, \sphericalangle(a, f)$. | 21. $A, f, \sphericalangle(f, d)$. |
| 22. $d, \sphericalangle(d, f), h_b$ *). | 23. A, d, h_b . | 24. A, h_a, h_b . |

25. Dane są dwa punkty A , B i prosta m ; zbudować prostą równoległą do m i przechodzącą w równej odległości od punktów A i B .

26. Dane są trzy punkty A , B , C nie leżące na jednej prostej; przez A poprowadzić prostą tak, by odcinki, poprowadzone do tej prostej z punktów B , C i jednakowo do niej nachylone, były sobie równe. Czy zadanie jest możliwe, jeżeli A , B , C leżą na jednej prostej?

27. Dane są trzy punkty A , B , C , nie leżące na jednej prostej; zbudować prostą równoodległą od wszystkich trzech punktów. Ile rozwiązań posiada zadanie?

Zbudować romb, mając dane:

- | | | | |
|--------------|----------------------------------|----------------|----------------------------------|
| 28. e, f . | 29. $a, \sphericalangle(a, e)$. | 30. A, h_a . | 31. $e, \sphericalangle(a, e)$. |
|--------------|----------------------------------|----------------|----------------------------------|

32. Zbudować kwadrat tak, by jedna jego przekątna leżała na danej prostej i jeden bok przechodził przez dany punkt. Ile rozwiązań posiada zadanie?

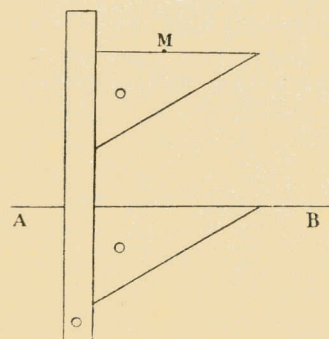
33. Dane są trzy punkty A , M , N , nie leżące na jednej prostej; zbudować kwadrat $ABCD$ tak, by punkt M leżał na boku a (lub na jego przedłużeniu), punkt zaś N na boku c (lub na jego przedłużeniu).

Ćwiczenia XI. Wszystkie zadania konstrukcyjne rozwiązywać za pomocą dwóch przyrządów: linjału i cyrkla. Można jednak posługiwać się innymi przyrządami, np. ekierką i linjałem lub też dwiema ekierkami.

Ekierka, jest to deseczka, mająca kształt trójkąta prostokątnego. Nadaje się ona specjalnie do kreślenia prostopadłych i równoległych.

*) Wysokością równoległoboku nazywamy odległość jednego jego boku od boku przeciwległego. Wobec tego równoległobok ma, wogóle mówiąc, dwie różne wysokości.

Kreślenie prostopadłych nie wymaga specjalnych wyjaśnień; co się tyczy kreślenia równoległych, to możemy postąpić w sposób następujący:



Rys. 57.

Chcąc przez punkt M poprowadzić równoległą do prostej AB , przykładamy brzeg ekierki do tej prostej, do drugiego brzegu ekierki przykładamy linjał i przesuwamy ekierkę wzdłuż linjału (rys. 57), aż natrafimy na punkt M .

Posługując się wyłącznie linjałem i ekierką (a więc kreśląc proste, proste równoległe i proste prostopadłe), rozwiązać następujące zadania:

1. Na prostej m dany jest odcinek AB ; wykreślić odcinek równy AB i równoległy do niego.

1a. Przy tym samym założeniu, co w poprzednim zadaniu, odłożyć na prostej m odcinek równy AB .

W szczególności podwoić, potroić, ... odcinek AB .

2. Podzielić dany odcinek AB na 3 równe części.

3. Zbudować trójkąt równoramienny.

4. Podwoić kąt dany.

Następujące trzy zadania wymagają znajomości figur symetrycznych lub też własności kątów wpisanych w koło.

5. Zbudować punkt symetryczny z punktem A względem danej osi m . [Wskazówka: na m obieramy dowolnie punkty B, D , wykreślamy równoległobok $ABCD$, przez C prowadzimy $p \parallel m$, wreszcie $AA' \perp p$].

6. Podzielić kąt dany na połowy.

7. W końcu danego odcinka AB poprowadzić prostą m i na niej odłożyć $AX = AB$.

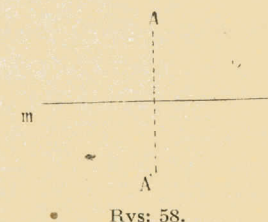
ROZDZIAŁ VI.

O figurach symetrycznych.

§ 90. Jeżeli punkty A, A' leżą po dwóch stronach prostej m tak, że prosta m jest prostopadłą do odcinka AA' i dzieli go na połowy, wówczas powiadamy, że punkty A, A' są z sobą symetryczne względem osi m . Jeżeli, mając dany punkt A i oś

symetrii m , budujemy symetryczny z nim punkt A' , wówczas powiadamy, że przekształcamy A na punkt A' , symetryczny z nim względem osi m .

Rzecz jasna, że jeśli A został przekształcony symetrycznie na A' , wówczas możemy też odwrotnie uważać A za przekształcenie symetryczne punktu A' . Punkt A nazywamy niekiedy obrazem symetrycznym punktu A' , i odwrotnie.



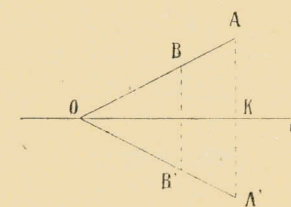
Rys. 58.

Określenie. Dwie figury nazywamy symetrycznymi względem osi, jeżeli każdemu punktowi jednej figury odpowiada punkt drugiej figury, symetryczny z nim względem tej osi.

Zauważmy, że jeśli mamy dany dowolny punkt A i oś symetrii, wówczas istnieje tylko jeden punkt A' , symetryczny z punktem A względem tej osi. Spostrzeżenie to pozwoli nam z łatwością odwracać twierdzenia, które zaraz poznamy.

§ 91. Twierdzenie. Jeżeli dwie półproste, wychodzące z tego samego punktu na osi, leżą po dwóch stronach tej osi i są do niej jednakowo nachylone, wówczas półproste są z sobą symetryczne względem tej osi.

Istotnie, jeżeli z dowolnego punktu A jednej półprostej poprowadzimy prostopadłą AK do osi m , otrzymamy trójkąt równoramienny $\triangle AOA'$ (gdyż wysokość jego OK jest zarazem dwusieczną kąta $\angle AOA'$), musi więc być $AK = KA'$ i punkty A, A' muszą być z sobą symetryczne względem osi m .



Rys. 59.

Ponieważ dla każdego punktu istnieje tylko jeden punkt symetryczny z nim względem danej osi m , zatem musi być prawdziwe następujące twierdzenie przeciwne:

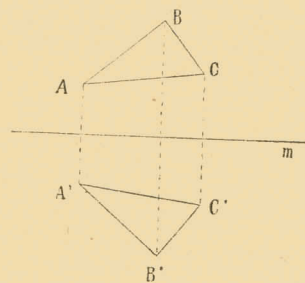
Twierdzenie przeciwne. Żaden punkt płaszczyzny, nie leżący na półprostej OA' nie może być symetryczny z jakimkolwiek punktem półprostej OA .

Mamy tedy prawo twierdzić, że obrazem symetrycznym półprostej OA względem osi m jest półprosta OA' tak położona, że $\sphericalangle AOK = \sphericalangle A'OK$.

§ 92. Twierdzenie. Obrazem symetrycznym odcinka jest równy mu odcinek. Twierdzenie jest oczywiste dla odcinków takich, jak OA lub OA' , których jeden koniec leży na osi symetrii. Chcąc dowieść twierdzenia w przypadku ogólnym, wystarczy zauważyć (rys. 59), że $AB = AO - OB = A'O - B'O = A'B'$.

§ 93. Twierdzenie. Obrazem symetrycznym prostej równoległej do osi jest druga prosta równoległa do osi i leżąca po drugiej jej stronie w tej samej od niej odległości, co i pierwsza prosta.

§ 94. Twierdzenie. Obrazem symetrycznym trójkąta jest równy mu trójkąt.



Rys. 60.

Każde dwa odcinki, mające wspólny koniec, muszą się przekształcać na dwa odcinki o wspólnym końcu, zatem obrazem trójkąta jest trójkąt. Na mocy twierdzenia § 92 mamy

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad BC = B'C',$$

$$\text{a więc } \triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

Wniosek. Obrazem symetrycznym wielokąta jest równy mu wielokąt.

§ 95. Istnieje inny jeszcze rodzaj symetrii. Jeżeli mianowicie punkt O dzieli na połowy odcinek AA' , wówczas powiemy, że punkty A, A' są symetryczne z sobą względem środka O .

Dla każdego punktu istnieje tylko jeden punkt symetryczny z nim względem danego środka O .

§ 96. Twierdzenie. Jeżeli odcinek przekształcimy symetrycznie względem środka, otrzymamy równy mu odcinek.

Niech będzie dany odcinek AB i środek symetrii O . Łącząc punkty A, B ze środkiem O i odkładając $OB' = OB, OA' = OA$, otrzymujemy odcinek $A'B'$. Powiadam, że odcinek ten

1-o równa się odcinkowi AB i 2-o jest z nim symetryczny względem punktu O .

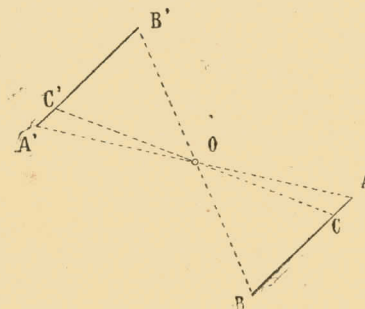
1-o Istotnie $OA = OA', OB = OB', \sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB'$, zatem $\triangle AOB = \triangle A'OB'$ i $AB = A'B'$.

2-o Jeżeli przez punkt C , obrany dowolnie na jednym odcinku, poprowadzimy prostą CO , przetnie ona drugi odcinek w punkcie C' (gdyż leży ona w kącie $\sphericalangle AOB$, a więc i w wierzchołkowym kącie $\sphericalangle A'OB'$), przyczym musi być $OC = OC'$, ponieważ mamy

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle A'OC',$$

$$\sphericalangle CAO = \sphericalangle C'A'O, \quad OA = OA',$$

$$\text{czyli } \triangle AOC = \triangle A'OC'.$$



Rys. 61.

§ 97. Twierdzenie. Figurą symetryczną z danym trójkątem względem danego środka jest równy mu trójkąt.

Wynika z powyższego twierdzenia i z pewnika IIIj.

§ 98. Pomiedzy tymi dwoma rodzajami symetrii istnieje bliski związek, o którym mówi następujące twierdzenie.

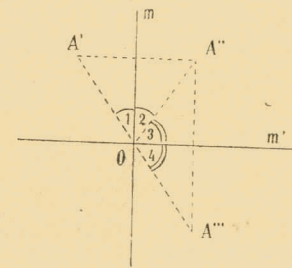
Twierdzenie. Jeżeli figurę przekształcimy kolejno względem dwu prostopadłych do siebie osi symetrii, wówczas punkt przecięcia tych osi będzie środkiem symetrii dla pierwszej i dla ostatniej figury.

Niech będą dane dwie prostopadłe do siebie osie m i m' . Jeżeli punkt A' przekształcimy (względem osi m) na punkt A'' , ten zaś przekształcimy (względem osi m') na punkt A''' , wówczas A' i A''' muszą być z sobą symetryczne względem środka O .

Jakoż mamy odrazu

$$OA' = OA'' = OA'''.$$

Pozostaje wykazać, że OA' i OA''' tworzą jedną prostą.



Rys. 62.

Istotnie, $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$.

a więc $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = \text{kątowni prostemu}$,

skąd $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 = \text{kątowni półpełnemu}$.

§ 99. Mowiliśmy dotąd o dwóch figurach symetrycznych z sobą. Zdarza się jednak, że jakaś figura składa się z dwóch części równych i tak względem siebie położonych, że jedna z nich jest do drugiej symetryczna względem pewnej osi lub też względem środka. Przykładami takich figur mogą być trójkąt równoramienny (w którym osią symetrii jest dwusieczna kąta między równymi bokami) i równoległobok (w którym środkiem symetrii jest punkt przecięcia się przekątnych).

Osie i środek symetrii nazywamy *elementami symetrii* danej figury.

Uwaga. Łatwo jest przekonać się doświadczalnie, że dwie (materiałne) figury symetryczne względem osi, pomimo że są sobie równe, nie dadzą się jednak doprowadzić do przystania, jeżeli poruszać je będziemy w ich płaszczyźnie; musimy jedną z nich wyjąć z płaszczyzny i odwrócić na drugą stronę. Natomiast dwie figury symetryczne względem środka doprowadzić możemy do przystania, jeśli jedną z nich obrócimy (w jej płaszczyźnie) dokoła środka symetrii o kąt półpełny.

Ćwiczenia XII.*) 1. Dana oś symetrii m i punkty A , B po jednej jej stronie oraz punkt A' , symetryczny z A . Znaleźć punkt symetryczny z B . [Wskazać ów sposób budowania dwusiecznej, podany w Ćwicz. IV, 12 na str. 34].

2. Dane dwie pary punktów A , A' oraz B , B' symetrycznych z sobą względem tej samej osi; wykreślić oś symetrii.

3. Czy dwie pary punktów symetrycznych wystarczają do rozwiązania poprzedniego zadania, jeżeli proste AA' , BB' są do siebie równoległe?

4. Dane są: oś symetrii m , prosta b oraz dwa punkty A , A' symetryczne z sobą (przyczym A nie leży na prostej b); zbudować prostą b' , symetryczną z b . [Wskazać ów sposób: dowolne dwa punkty prostej b przekształcamy symetrycznie].

5. Dany środek symetrii O i dwie proste a , a' względem niego symetryczne; zbudować prostą b' , symetryczną względem O z daną prostą b .

*) Zadania № 1—6 należy rozwiązać z pomocą linjalu; niewolno tedy posługiwać się w tych wypadkach cyrklem.

6. Dany środek symetrii O i dwie proste a , a' względem niego symetryczne; zbudować punkt P' , symetryczny względem O z danym punktem P . [Wskazać ów sposób: przez punkt P prowadzimy dwie dowolne proste i przekształcamy je symetrycznie].

7. Jakie są elementy symetrii odcinka? dwóch równoległych do siebie odcinków? dwóch odcinków równoległych i równych sobie? dwóch prostych równoległych? dwóch prostych przecinających się?

8. Jakie są elementy symetrii trójkąta równoramiennego? trójkąta równobocznego?

9. Jakie są elementy symetrii równoległoboku? rombu? prostokąta? kwadratu? trapezu równoramiennego?

10. Dany jest równoległobok i prosta m przecinająca dwa jego sąsiednie boki; wpisać w niego drugi równoległobok tak, by jeden bok tego nowego równoległoboku leżał na prostej m .*)

11. Na danym równoległoboku opisać drugi równoległobok tak, by jeden jego wierzchołek leżał w danym punkcie P .

12. Dany jest równoległobok i prosta m , nie przecinająca jego konturu; wykreślić równoległą do m .

13. W dany trapez równoramienny wpisać romb, jeżeli mamy zaznaczony na rysunku środek jednego z nierównoległych boków trapezu.

14. Dany prostokąt wraz z swymi osiami symetrii i prosta m , nie przechodząca przez żaden wierzchołek prostokąta. Wykreślić romb, którego jeden bok leżałby na m i który miałby obie osie symetrii wspólne z prostokątem.

15. W dany romb wpisać prostokąt tak, by jeden jego wierzchołek leżał w danym punkcie [Wskazać ów sposób: porówn. zadanie 1.].

ROZDZIAŁ VII.

O pojęciu miejsca geometrycznego.

§ 100. Określenie. Miejscem geometrycznym punktów, mających pewną własność, nazywamy figurę, która spełnia dwa następujące warunki:

1-o każdy punkt tej figury posiada ową własność,

2-o żaden punkt nie leżący na naszej figurze nie posiada tej własności.

Możemy np. okrąg koła nazwać miejscem geometrycznym punktów płaszczyzny, równoodległych od jednego punktu, zwa-

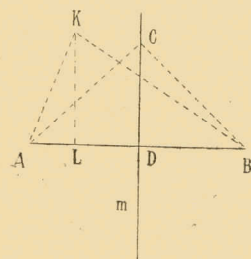
*) Przy rozwiązywaniu zadań №№ 10 — 15 wolno posługiwać się tylko linjalem.

nego środkiem koła, gdyż: 1) wszystkie punkty okręgu odległe są od środka o promień; 2) żaden inny punkt płaszczyzny nie jest odległy od środka o promień.

Chcąc tedy dowieść, że jakaś figura jest miejscem geometrycznym punktów mających taką a taką własność, musimy dowieść dwóch twierdzeń: prostego i przeciwnego. Oczywiście rzecz, że zamiast twierdzenia przeciwnego możemy dowieść twierdzenia odwrotnego, ponieważ oba te twierdzenia są zawsze jednocześnie prawdziwe lub jednocześnie błędne. *)

§ 101. Twierdzenie. *Miejszem geometrycznym punktów płaszczyzny, równoodległych od końców danego odcinka, jest oś symetrii tego odcinka.*

Jeżeli prosta m jest osią odcinka AB , wówczas



Rys. 63.

1) powiadam, że jakkolwiek obierzemy na osi punkt C , zawsze musi być $AC = CB$, gdyż $\triangle ABC$ jest równoramienne (dla czego)?

2) powiadam, że dla punktów nie leżących na osi równość ta zachodzić nie może, a mianowicie dla każdego punktu K płaszczyzny, leżącego z tej strony osi, z której znajduje się punkt A , musi zachodzić nierówność $KA < KB$.

Istotnie, jeżeli poprowadzimy KL prostopadłe do AB , wówczas musi być $KL \parallel CD$, a więc punkt L musi leżeć po tej samej stronie osi, po której znajduje się koniec A odcinka. Wobec

tego mamy $AL < LB$,

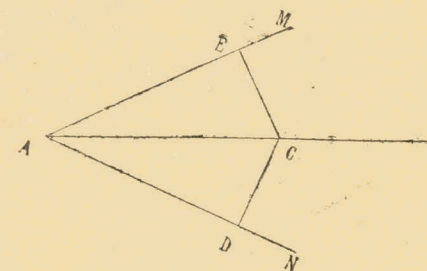
a więc (§ 70) $KA < KB$.

§ 102. Twierdzenie. *Miejszem geometrycznym punktów płaszczyzny, równoodległych od ramion kąta, jest dwusieczna tego kąta.*

*) Zgodnie z tym możnaby nieco inaczej określić miejsce geometryczne, a mianowicie w następujący sposób: *miejszem geometrycznym punktów posiadających pewną własność nazywamy figurę, która spełnia dwa następujące warunki: 1-o każdy punkt figury posiada tę własność, 2-o każdy punkt, mający ową własność, leży na naszej figurze.*

Niech będzie dany kąt $\angle MAN$ i jego dwusieczna AC i niech będą $CE \perp AM$, $CD \perp AN$.

1-o Dla każdego punktu C tej dwusiecznej musi być $EC = CD$, gdyż $\triangle AEC \equiv \triangle ACD$ (dla czego)?



Rys. 64.

2-o) Jeżeli punkt C płaszczyzny jest równoodległy od obu ramion kąta, wówczas punkt ten leży na dwusiecznej, gdyż w trójkątach prostokątnych $\triangle ECA$, $\triangle DCA$

$EC = CD$, bok AC jest wspólny,

a więc $\triangle ECA \equiv \triangle DCA$ i $\angle EAC = \angle CAD$.

Wniosek. *Miejsce geometryczne punktów płaszczyzny, równoodległych od dwóch przecinających się prostych, składa się z dwóch dwusiecznych kątów, zawartych między tymi prostymi.*

Ćwiczenia XIII. 1. Miejsce geometryczne punktów płaszczyzny jednakowo odległych od danej prostej m , składa się z dwóch prostych równoległych do niej i symetrycznie względem niej położonych.

2. Miejszem geometrycznym punktów płaszczyzny, jednakowo odległych od dwóch prostych równoległych, jest trzecia prosta, równoległa do nich i stanowiąca ich oś symetrii.

3. Dany jest punkt A i prosta m nie przechodząca przez ten punkt; znaleźć miejsce geometryczne środków wszystkich odcinków, poprowadzonych z punktu A do prostej m .

4. Z punktu A prowadzimy prostą, przecinającą prostą daną m w punktach $B_1, B_2, B_3, \dots$. Na tych prostych odkładamy (po jednej, którejkolwiek stronie prostej m) odcinki $B_1C_1 = 3AB_1, B_2C_2 = 3AB_2, B_3C_3 = 3AB_3, \dots$. Jakie jest miejsce punktów $C_1, C_2, C_3, \dots$?

5. Na ramieniu danego kąta odkładamy, poczynając od wierzchołka, dowolne odcinki kolejne, na drugim zaś ramieniu odkładamy (poczynając również od wierzchołka) kolejne odcinki odpowiednio równe poprzednim, wreszcie przez końce równych odcinków prowadzimy równoległe do ramion kąta. Jakie jest miejsce geometryczne punktów przecięcia się tych równoległych?

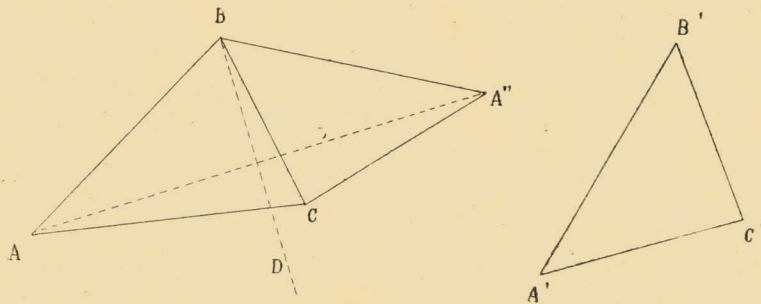
6. Mamy cztery pręty, które tworzą równoległobok $ABCD$. Pręty AB, AD pozostają nieruchome, pręty zaś BC, CD przesuwamy tak,

by 1-o figura $ABCD$ była zawsze równoległobokiem, 2-o żeby odcinki AB , AD zmieniały się zawsze w tym samym stosunku.*) Jakiej jest miejsce geometryczne punktu C ?

ROZDZIAŁ VIII.

O trójkątach nierównych.

§ 103. Twierdzenie. Jeżeli dwa boki jednego trójkąta równają się odpowiednio dwom bokom drugiego, lecz kąty między nimi zawarte nie są sobie równe, wówczas trzecie ich boki nie są równe, a mianowicie większy jest ten bok, który leży naprzeciwko większego kąta.



Rys. 65.

Niech będą dane trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ takie, że $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, ale $\sphericalangle ABC > \sphericalangle A'B'C'$; powiadam, że wówczas musi być $AC > A'C'$.

Jakoż zbudujmy po drugiej stronie boku BC trójkąt $\triangle CBA'' \equiv \triangle C'B'A'$.**) Łącząc punkty A i A'' , otrzymamy trójkąt równoramienny $\triangle ABA''$, tak iż dwusieczna jego BD musi być osią odcinka AA'' . Ale dwusieczna ta leży niewątpli-

*) To znaczy, że jeśli odcinek AB wzrósł (lub zmalał) n razy, wówczas odcinek AD musiał wzrosnąć (lub zmaleć) n razy.

**) Gdybyśmy mieli do czynienia z figurami materialnymi, powiedzielibyśmy: przesuńmy trójkąt $\triangle A'B'C'$ do trójkąta $\triangle ABC$ tak, by równe ich boki $B'C'$ i BC przystały do siebie.

wie wewnątrz kąta $\sphericalangle CBA$ (dlaczego?), wobec czego punkty C i A'' leżą po jednej stronie osi symetrii odcinka AA'' , a więc musi być (§ 101) $AC > CA''$ lub, co na jedno wychodzi, $AC > A'C'$.

§ 104. Weźmy pod uwagę dwa trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ w których $b = b'$, $c = c'$. Twierdzenia, dowiedzione w §§ 46 i 103 powiadają, że

jeżeli mamy $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, to musi być $a = a'$,
 „ „ „ $\sphericalangle A > \sphericalangle A'$, „ „ „ $a > a'$
 „ „ „ $\sphericalangle A < \sphericalangle A'$, „ „ „ $a < a'$

Mamy tu znów przykład t. zw. układu zamkniętego twierdzeń (str. 50). Istotnie, porównyując z sobą kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle A'$, możemy uczynić o nich tylko trzy przypuszczenia: albo $A > A'$, albo $A < A'$, albo $A = A'$. Wszystkie te trzy przypuszczenia nawzajem wyłączają się, a płynące z nich wnioski również wyłączają się wzajemnie. Wobec tego, na mocy zasady II o odwracaniu twierdzeń (str. 49-50), mamy prawo wypowiedzieć następujące

Twierdzenie odwrotne (względem § 103). Jeżeli dwa boki jednego trójkąta równają się dwom bokom drugiego, lecz trzecie ich boki nie są sobie równe, wówczas kąt przeciwległy większemu bokowi jest większy.

Ćwiczenia XIV. 1. Powtórzyć dowód twierdzenia § 103-go w przypadku, gdy suma kątów $\sphericalangle ABC + \sphericalangle C'B'A'$ jest większa od kąta półpełnego.

2. Dowieść, że w równoległoboku przekątna, łącząca wierzchołki kątów ostrych, jest większa od przekątnej, łączącej wierzchołki kątów rozwartych.

3. W czworoboku $ABCD$ mamy $AB = CD$, ale przekątna BD jest większa od przekątnej AC ; dowieść, że $\sphericalangle DCB > \sphericalangle CBA$.

4. W czworoboku $ABCD$ mamy $AB = CD$, ale zarazem $\sphericalangle BAD > \sphericalangle ADC$; dowieść, że wówczas musi być $\sphericalangle BCD > \sphericalangle CBA$.

5. W trójkącie $\triangle ABC$, w którym $AB < AC$, poprowadzono środkową AD ; dowieść, że kąt $\sphericalangle ADB$ jest ostry.

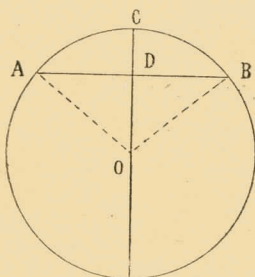
6. W poprzednim zadaniu obieramy na środkowej AD dowolny punkt E i łączymy go z wierzchołkami B , C ; który z dwóch odcinków BE czy CE jest większy?

ROZDZIAŁ IX.

O kole.

A. O różnych położeniach prostej względem koła

§ 105. Twierdzenie. Średnica prostopadła do cięciwy dzieli ją na połowy.



Rys. 66.

Niech będzie dana cięciwa AB i średnica OC do niej prostopadła w punkcie D ; powiadam że $AD = DB$.

Istotnie, trójkąt $\triangle AOB$ jest równoramienny, przyczem $OA = OB$, a więc wysokość, poprowadzona z wierzchołka O , musi być zarazem środkową.

§ 106. Powyższe twierdzenie posiada dwa założenia, można mu mianowicie nadać postać następującą:

założenie I: jeżeli prosta przechodzi przez środek koła,

założenie II: jeżeli prosta ta jest prostopadła do cięciwy,

wniosek: wówczas prosta dzieli cięciwę na połowy

Muszą wobec tego istnieć dwa twierdzenia odwrotne

Twierdzenia odwrotne (względem § 105). I Prostopadła, wystawiona w środku cięciwy, przechodzi przez środek koła.

II Średnica, dzieląca cięciwę na połowy, jest do tej cięciwy prostopadła.

Prawdziwość obutych twierdzeń wynika z faktu, że $\triangle OAB$ (rys. 66) jest równoramienny. [Porówn. § 58, str. 42].

Wniosek. Każda średnica jest osią symetrii okręgu.

§ 107. Twierdzenie. Wszystkie punkty cięciwy z wyjątkiem jej końców leżą wewnątrz koła, wszystkie zaś punkty, leżące na przedłużeniu cięciwy, znajdują się zewnątrz koła.

Istotnie, jeżeli D jest środkiem cięciwy AB i jeżeli M jest dowolnym punktem cięciwy, byle różnym od jej końców, wówczas mamy

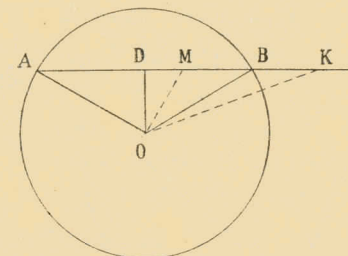
$$MD < DB,$$

a więc

$$OM < OB \text{ (na mocy § 70).}$$

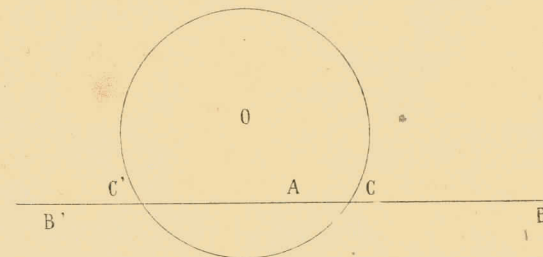
Wobec tego punkt M leży wewnątrz koła.

Jeżeli natomiast punkt K leży na przedłużeniu cięciwy, wówczas $DK > DB$, a więc i $OK > OB$, czyli odległość punktu K od środka koła jest większa od promienia, wobec czego K leży zewnątrz koła.



Rys. 67.

§ 108. Twierdzenie. Prosta, przechodząca przez dowolny punkt wewnętrzny koła, przecina jego okrąg w dwóch punktach.



Rys. 68.

Niech będzie dane koło, punkt wewnętrzny A i dowolna prosta m , przechodząca przez ten punkt.

Po obie strony punktu A odkładamy odcinki AB, AB' równe promieniowi koła. Punkty B, B' leżą niewątpliwie zewnątrz koła, gdy średnica jest większa od każdej cięciwy, przechodzącej przez punkt A . Mamy tedy na prostej m dwa odcinki AB, AB' , które łączą punkt A , leżący wewnątrz koła, z punktami zewnętrznymi B, B' , a więc na mocy pewnika VI każdy z tych odcinków musi przeciąć okrąg w jednym punkcie.

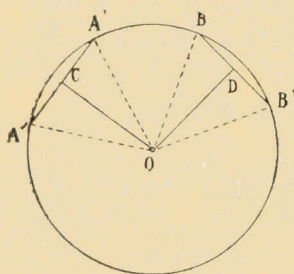
§ 109. Twierdzenie. Średnica jest większa od każdej innej cięciwy.

Istotnie, w $\triangle ABO$ (rys. 67) mamy

$$AO + OB > AB,$$

ale suma $AO + OB$ równa się średnicy koła.

§ 110. Twierdzenie. W tym samym kole (lub w równych kołach) cięciwy jednakowo odległe od środka są sobie równe.

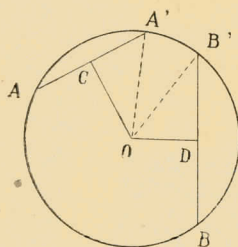


Rys. 69.

Jeżeli poprowadzimy ze środka koła prostopadłe OD , OC do dwóch danych cięciw i jeżeli $OD = OC$, wówczas $\triangle AOC \equiv \triangle OBD$ (dla czego?), zatem $BD = AC$. Ale BD i AC są to połówki cięciw BB' i AA' , skoro więc połówki równają się sobie, to i cięciwy BB' i AA' muszą być sobie równe.

§ 111. Twierdzenie. Z dwóch cięciw tego samego koła (lub równych kół) większa jest ta, której odległość od środka koła jest mniejsza.

Jeżeli do danych cięciw AA' , BB' poprowadziliśmy ze środka koła prostopadłe OC , OD jeżeli $OC > OD$, wówczas powiadam, że musi być $AA' < BB'$.



Rys. 70.

Jakoż porównajmy z sobą dwa trójkąty prostokątne: $\triangle OCA'$, $\triangle ODB'$. Mają one równe przeciwprostokątne ($OA' = OB'$), ale $OC > OD$, zatem na mocy Ćwiczenia VIII, 11, str. 53, musi być $CA' < DB'$. Stąd wynika, że $AA' < BB'$.

§ 112. W dwóch poprzednich twierdzeniach mamy znów przykład układu zamkniętego. Istotnie, oznaczając przez a i a' cięciwy, przez h i h' ich odległości od środka koła, mamy:

$$\begin{aligned} \text{jeżeli } h &= h', \text{ wówczas } a = a', \\ \text{„ } h &> h', \quad \text{„ } a < a' \\ \text{„ } h &< h', \quad \text{„ } a > a'. \end{aligned}$$

O odległościach h , h' można uczynić tylko trzy wymienione przypuszczenia, które się wzajemnie wyłączają; tak samo wyłączają się nawzajem wnioski z nich płynące, a więc na mocy zasady II o odwracaniu twierdzeń (str. 49–50) muszą być prawdziwe następujące twierdzenia odwrotne.

Twierdzenia odwrotne (względem § 110, 111). I. W tym samym kole (lub w równych kołach) równe cięciwy są jednakowo odległe od środka koła.

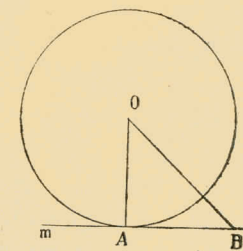
II. W tym samym kole (lub w równych kołach) większa cięciwa leży bliżej środka koła.

§ 113. Określenie. Prosta, mająca z okręgiem koła tylko jeden punkt wspólny, nazywa się styczną do koła (lub do okręgu).

Musimy, oczywiście, wykazać możliwość istnienia takiej prostej; w tym celu najlepiej postąpimy, jeżeli podamy sposób budowania prostej, mającej z okręgiem tylko jeden punkt wspólny. Taki właśnie jest sens następującego twierdzenia.

§ 114. Twierdzenie. Prostopadła do promienia, poprowadzona przez jego koniec, jest styczną do koła.

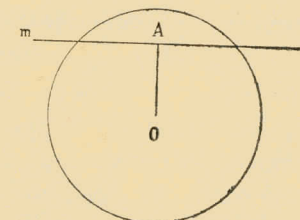
Niech będzie dany promień OA i prosta m , prostopadła do niego w jego końcu A . Punkt A niewątpliwie leży na okręgu koła, natomiast każdy inny punkt tej prostopadłej, np. B , musi leżeć poza kołem, gdyż OB jest pochyłą, OA zaś prostopadłą do m , a więc musi być $OB > OA$.



Rys. 71.

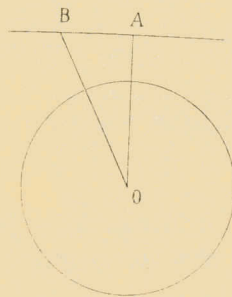
§ 115. Twierdzenie. Prosta, której odległość od środka koła jest mniejsza od promienia, przecina okrąg w dwóch punktach.

Jeżeli mamy daną taką prostą m , że prostopadła OA , poprowadzona do niej ze środka koła, jest mniejsza od promienia, wówczas punkt A leży wewnątrz koła, a wiemy już (§ 108), że każda prosta, przechodząca przez punkt wewnętrzny koła, przecina jego okrąg w dwóch punktach.



Rys. 72

§ 116. Twierdzenie. Jeżeli odległość prostej od środka koła jest większa od promienia, wówczas prosta nie ma z okręgiem ani jednego punktu wspólnego.



Rys. 73.

Jeżeli prostopadła OA , poprowadzona ze środka koła do prostej m , jest większa od promienia, wówczas punkt A leży zewnątrz koła. Każdy inny punkt tej prostej, np. punkt B , tym bardziej leży zewnątrz koła, gdyż $OB > OA$ (dlaczego?).

Określenie. Prosta, przecinająca okrąg w dwóch punktach, nazywa się *sieczną*.

§ 117. Powyższe trzy twierdzenia tworzą znów układ zamknięty. Oznaczmy przez $(O)r$ okrąg danego koła, przez m daną prostą, przez h odległość jej od środka koła. Trzy twierdzenia, o których mowa, możemy tak sformułować:

jeżeli $h = r$, wówczas $(O)r$ i m mają jeden punkt wspólny,
 „ $h > r$, „ $(O)r$ i m nie mają wcale punktów wspólnych,
 „ $h < r$, „ $(O)r$ i m mają dwa punkty wspólne.

Rzecz prosta, że $h = r$, $h > r$, $h < r$ są to jedyne trzy przypuszczenia, jakie można uczynić o odległości prostej od środka koła; wszystkie te trzy przypuszczenia wyłączają się nawzajem, jak również trzy płynące z nich wnioski, a więc na mocy zasady II o odwracaniu twierdzeń (str. 49—50) mamy prawo wypowiedzieć następujące trzy twierdzenia odwrotne:

Twierdzenia odwrotne. I. *Styczna odległa jest o promień od środka koła.* Albo innymi słowami: *styczna jest prostopadła do promienia, poprowadzonego do punktu styczności.*

II. *Jeżeli prosta nie ma punktów wspólnych z kołem, wówczas odległość jej od środka koła jest większa od promienia.*

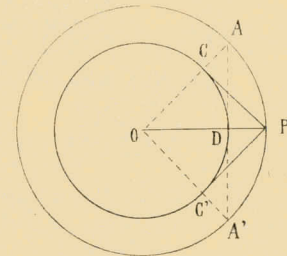
III. *Jeżeli prosta ma dwa punkty wspólne z okręgiem, wówczas odległość jej od środka koła jest mniejsza od promienia.*

§ 118. **Zadanie.** Z punktu zewnętrznego poprowadzić styczną do danego koła.

Można z łatwością przewidzieć, że o ile zadanie posiada rozwiązanie, musi ich mieć dwa. Istotnie, prosta OP (rys. 74) jest osią symetrii figury danej, jeśli więc istnieje styczna po jednej stronie osi, to musi istnieć symetryczna styczna po drugiej stronie osi. Tak więc

z punktu P można poprowadzić parzystą liczbę stycznych. Ale dostrzegamy odrazu, że po jednej stronie osi może istnieć tylko jedna styczna, gdyby bowiem było ich dwie, np. PC i PX , wówczas kąt $\angle OCP$ nie mógłby równać się kątowi $\angle OXP$ (dlaczego?).

Niech będzie dane koło O i punkt zewnętrzny P . Łączymy O z P ; przez punkt D , w którym prosta OP przecina okrąg dany, prowadzimy prostą a prostopadłą do OP ; następnie kreślimy koło $(O)P$, które przecina prostą a w punktach A i A' , wreszcie łączymy O z punktami A i A' . Jeżeli proste OA , OA' przecinają okrąg koła danego odpowiednio w punktach C i C' , wówczas proste PC , PC' są żądanymi stycznymi.



Rys. 74.

Istotnie, $\triangle OCP \equiv \triangle AOD$,

gdyż $\angle AOP$ jest wspólny, $OC = OD$, $OA = OP$.

Wobec tego musi być $\angle OCP = \angle ODA =$ kątowi prostemu.

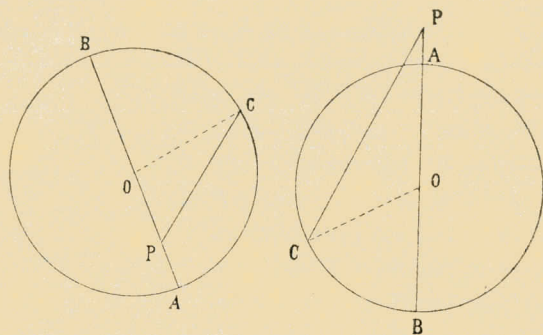
Tak samo dowodzimy, że PC' jest styczną do koła danego.

§ 119. **Określenia.** *Normalną do koła (lub do okręgu) nazywamy odcinek, prostopadły do stycznej w jej punkcie styczności.*

Wobec tego każdy promień koła jest normalną, poprowadzoną ze środka koła. Z każdego innego punktu, nie leżącego na okręgu, można poprowadzić dwie normalne; są to mianowicie dwa odcinki, leżące na średnicy, przechodzącej przez ten punkt. Np. z punktu P (rys. 75) możemy przeprowadzić normalne PA , PB . Z nich jedna PB przechodzi przez środek koła, w drugiej zaś PA przedłużenie normalnej przechodzi przez środek.

§ 120. **Twierdzenie.** Z pośród wszystkich odcinków, jakie można poprowadzić z danego punktu do okręgu koła, największym odcinkiem jest normalna, przechodząca przez środek koła, najmniejszym zaś normalna, której przedłużenie przechodzi przez środek koła.

Niech będzie dane koło O i punkt P (zewnątrzny lub wewnętrzny). Niech PA , PB będą dwie normalne, PC zaś dowolna sieczna.



Rys. 75.

Z trójkąta $\triangle POC$ mamy

$$OP + OC > PC,$$

że zaś $OC = OB$, zatem $PB > PC$.

Z tego samego trójkąta mamy

$OC - OP < PC$, jeżeli punkt P leży wewnątrz koła,

$OP - OC < PC$, jeżeli punkt P leży zewnątrz koła.

Ponieważ zaś $OC = OA$, zatem w obu przypadkach mamy

$$PA < PC.$$

Ćwiczenia XV. 1. Prosta nie może mieć z okręgiem więcej niż dwa punkty wspólne.

2. Z dowolnego punktu P (leżącego wewnątrz lub zewnątrz koła) poprowadzono dwa równe odcinki PA , PB , których końce A , B leżą na okręgu danego koła; dowieść, że dwusieczna kąta $\sphericalangle APB$ przechodzi przez środek koła.

2a. Opierając się na poprzednim zadaniu, znaleźć środek danego koła.

3. Jeżeli dwie równe cięciwy przecinają się, wówczas odcinki na jednej z nich równają się odcinkom na drugiej.

4. Jeżeli dwie równe cięciwy przecinają się, wówczas są symetryczne względem średnicy, przechodzącej przez ich punkt przecięcia.

5. W kole mamy dane dwie równoległe cięciwy AA' , BB' ; dowieść, że jeśli proste AB , $A'B'$ przecinają się w punkcie P , proste zaś AB' , $A'B$ w punkcie Q , wówczas prosta PQ przechodzi przez środek koła.

Oprócz na tym sposób wyznaczania środka koła za pomocą linijki i ekierki.

6. Dane koło O , średnica MON , cięciwa AB oraz punkt A' , symetryczny z A względem tej średnicy. Posługując się tylko linijalem, poprowadzić przez A' cięciwę równą AB .

7. Jeżeli dwa koła są współśrodkowe (t. j. zostały wykreślone z tego samego środka), wówczas na każdej siecznej, przecinającej oba koła, otrzymujemy dwie pary równych odcinków.

8. Dane jest koło O , odcinek a i prosta m ; poprowadzić cięciwę, równoległą do m i równą odcinkowi a .

9. W poprzednim zadaniu poprowadzić cięciwę, prostą do m i równą a .

10. W poprzednim zadaniu poprowadzić cięciwę nachyloną do m pod danym kątem $\sphericalangle \alpha$ i równą danemu odcinkowi a .

11. Przez dany punkt wewnętrzny koła poprowadzić najkrótszą cięciwę.

12. Dane koło O , średnica AOB oraz dwa punkty C , D na okręgu; poprowadzić przez te punkty cięciwy, jednakowo nachylone do średnicy AOB . Rozróżnić dwa przypadki: 1-o gdy C i D są z sobą symetryczne względem danej średnicy; 2-o gdy nie są symetryczne.

13. Do danego koła O poprowadzić styczną

a) jeżeli jest dany punkt styczności S ;

b) jeżeli styczna ma być równoległa do danej prostej m ,

c) jeżeli styczna ma być prostopadła do danej prostej m ,

d) jeżeli styczna ma być nachylona do danej prostej m pod danym kątem $\sphericalangle \alpha$.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:*)

14. a, r_a, h_a .

15. a, h_c, A .

16. h_a, s_a, B .

17. a, r_a, r_b .

18. a, c, r_a .

19. a, c, r_b .

20. $a, r_a, \sphericalangle(a, s_a)$.

21. $a, c, \sphericalangle(s_c, c)$.

22. a, r_a, s_a .

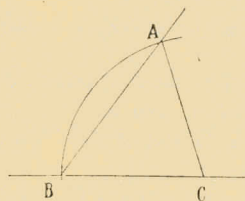
23. Zbudować trójkąt, mając dane a, b, B .

Na dowolnej prostej odkładamy odcinek $BC = a$; znamy już dwa wierzchołki B, C trójkąta; zadanie będzie rozwiązane, jeżeli znajdziemy trzeci wierzchołek A . Otóż ten trzeci wierzchołek leży na ramieniu kąta, zbudowanego przy punkcie B i równego danemu B , a zarazem leży w odległości odcinka b od wierzchołka C . Stąd wynika następujące rozwiązanie: przy punkcie B budujemy kąt równy danemu, a z punktu C , jako ze środka, kreślimy koło promieniem $= b$; wierzchołek A musi być punktem przecięcia się tego okręgu z ramieniem kąta $\sphericalangle B$.

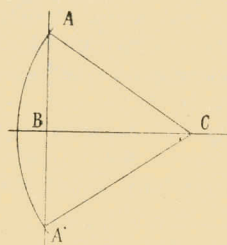
Badanie. 1-o Jeżeli $b > a$, okrąg nasz przecina ramię kąta (lub jego przedłużenie) w dwóch punktach A, A' ; otrzymujemy tedy dwa trójkąty $\triangle CBA, \triangle CBA'$, ale tylko pierwszy z nich odpowiada warunkom zadania, gdyż $\sphericalangle CBA'$ nie równa się B (chyba, że kąty $\sphericalangle CBA, \sphericalangle CBA'$ są proste (rys. 77 i 78).

*) W każdym z tych zadań trzeba starannie zbadać, ile mamy rozwiązań.

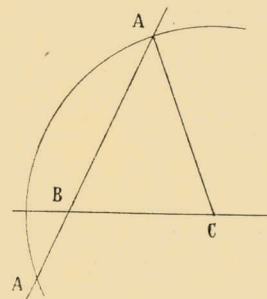
2-o Jeżeli $b = a$ (rys. 76), wówczas kąt $\sphericalangle B$ musi być ostry (dlaczego?), i mamy jedno rozwiązanie.



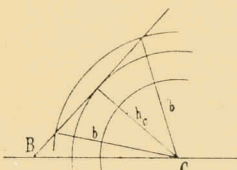
Rys. 76.



Rys. 77.



Rys. 78.



Rys. 79.

3-o Jeżeli $b < a$ (rys. 79), wówczas kąt $\sphericalangle B$ musi być ostry (dlaczego?). Mamy w tym wypadku jedno lub dwa rozwiązania, lub wreszcie nie mamy wcale rozwiązań, zależnie od tego, czy $b = h_c$, czy też $b > h_c$ lub $b < h_c$.

Streszczając tedy wyniki powyższego badania i oznaczając kąt prosty literą δ , mamy:

- | | | |
|-----|---|---------------------------------------|
| 1-o | jeżeli $b > a$ oraz $\sphericalangle B \neq \delta$, | wówczas istnieje 1 rozwiązanie, |
| 2-o | „ $b > a$ „ $\sphericalangle B = \delta$, | „ „ 2 rozwiązania, |
| 2-o | „ $b = a$ „ $\sphericalangle B < \delta$, | „ „ 1 rozwiązanie, |
| 2-o | „ $b = a$ „ $\sphericalangle B \geq \delta$, | „ „ niema rozwiązań; |
| 3-o | „ $b < a$ „ $\sphericalangle B \geq \delta$, | „ „ „ |
| 3-o | „ $b < a$ „ $\sphericalangle B < \delta$, | „ „ istnieje 1 rozw. przy $b = h_c$, |
| | | „ 2 rozw. przy $b > h_c$, |
| | | niema rozwiąz. przy $b < h_c$. |

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

- | | | |
|-------------------|---|---------------------------------------|
| 23. a, C, s_b . | 24. $b, s_b, \sphericalangle(a, s_b)$. | 25. $a, b, \sphericalangle(b, s_b)$. |
| 26. a, u_a, C . | 27. C, d_C, u_a . | 28. a, B, d_C . |

29. Dane koło O i punkt A ; poprowadzić w danym kole średnicę, której odległość od punktu A równałaby się danemu odcinkowi b .

30. Z każdego punktu wewnętrznego można poprowadzić do okręgu dwa równe sobie odcinki; jeżeli jednak z jakiegoś punktu można poprowadzić więcej niż dwa równe odcinki, wówczas punkt ten jest środkiem koła. [Wskazówka: sprowadzenie do sprzeczności].

31. Jeżeli dwie cięciwy, przecinając się, dzielą się na połowy, wówczas są one obie średnicami.

32. Na mocy poprzedniego twierdzenia dowieść, że jeśli równoległok ma nierówne przekątne, wówczas wierzchołki jego nie mogą leżeć na okręgu koła.

33. Jeżeli dwie przecinające się cięciwy nie są symetryczne względem średnicy, poprowadzonej do ich punktu przecięcia, wówczas cięciwy nie są sobie równe, a mianowicie większa jest ta, która tworzy mniejszy kąt ze średnicą.

MIEJSCA GEOMETRYCZNE.

34. Znaleźć i wykreślić miejsce geometryczne punktów, odległych o dany odcinek a od danego okręgu. [Odpow.: składa się z dwóch okręgów współśrodkowych z danym. Czy zawsze?].

35. Jakie jest miejsce geometryczne środków kół, przechodzących przez dwa dane punkty?

35a. Wszystkie okręgi, których środki leżą na danej prostej m i które przechodzą przez dany punkt A , przechodzą jeszcze przez drugi stały punkt.

36. Znaleźć miejsce geom. środków kół, stycznych do danej prostej w danym jej punkcie.

37. Znaleźć miejsce środków równoległych cięciw w danym kole.

38. Znaleźć w danym kole miejsce geom. środków równych cięciw.

39. Znaleźć miejsce geom. środków kół, stycznych do dwu danych prostych.

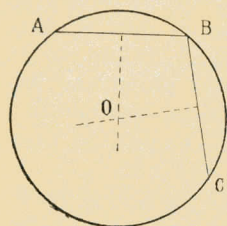
40. Dane są dwie proste przecinające się odcinek r ; promieniem równym r wykreślić koło styczne do obu danych prostych.

41. Mamy dane koło, a w nim stałą średnicę AB oraz równoległą do niej cięciwę CD . Niech M, N będą odpowiednio punktami przecięcia się prostych CB, AD oraz prostych AC, BD . Jakie jest miejsce geometryczne punktów M, N , jeżeli cięciwa CD przesuwamy się, pozostając równoległą do AB ?

B. O kołach przechodzących przez trzy punkty lub stycznych w trzech punktach.

§ 121. Twierdzenie. Trzy punkty, nie leżące na jednej prostej, wyznaczają okrąg koła.

Innymi słowy: przez trzy punkty nie leżące na prostej przechodzi zawsze okrąg koła i zawsze tylko jeden okrąg.



Rys. 80.

Istotnie, jeżeli dane punkty A, B, C nie leżą na prostej, wówczas oś symetrii odcinków AB, BC muszą się przeciąć (gdyż w przeciwnym razie linja ABC nie byłaby łamana); niech O będzie tym punktem przecięcia. Punkt O jest równoodległy od wszystkich trzech punktów A, B, C , ponieważ pierwsza oś symetrii jest miejscem geometrycznym punktów równoodległych od A i B , druga zaś jest miejscem punktów równoodległych od B i C .

Wniosek. Dwa okręgi nie mogą mieć więcej niż dwa punkty wspólne.

§ 122. Określenia. Opisanym na wielokącie nazywamy okrąg koła, przechodzący przez wszystkie wierzchołki wielokąta. Wpisanym w wielokąt nazywamy okrąg koła, styczny do wszystkich boków wielokąta. Wobec tego powyższe twierdzenie da się jeszcze wysłowić w następujący sposób: na każdym trójkącie można opisać koło, ale tylko jedno.

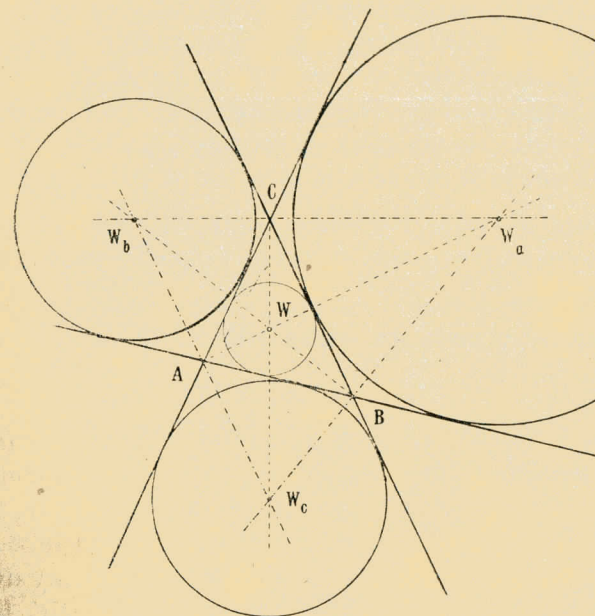
§ 123. Twierdzenie. Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem koła wpisanego w trójkąt.

Niech będzie dany $\triangle ABC$. Poprowadźmy dwusieczne kątów $\sphericalangle ABC, \sphericalangle BAC$. Przedewszystkim powiadam, że dwusieczne te przecinają się, gdy suma kątów jednostronnych wewnętrznych $\sphericalangle WBA + \sphericalangle BAW$ jest mniejsza od dwóch kątów prostych (dla czego?).

Dalej, dwusieczna BW jest miejscem geometrycznym punktów równoodległych od boków a i c trójkąta; tak samo dwusieczna AW jest miejscem punktów równoodległych od boków c i b , a więc punkt W , w którym przecinają się dwusieczne, musi być równoodległy od wszystkich trzech boków trójkąta.

Wynika stąd: 1-o że dwusieczna trzeciego kąta musi przejść przez punkt W , gdyż na niej leżą wszystkie punkty równoodległe od boków a i b ;

2-o że jeśli z punktu W poprowadzimy prostopadłą do któregośkolwiek boku i odcinkiem równym tej prostopadłej zakreslimy koło, wówczas koło to musi być styczne do wszystkich trzech boków trójkąta.



Rys. 81.

§ 124. Twierdzenie. Dwusieczne kątów zewnętrznych przy którychkolwiek dwóch wierzchołkach trójkąta i dwusieczna kąta wewnętrznego przy trzecim wierzchołku przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem koła stycznego do boku trójkąta i do przedłużenia dwu drugich boków.

Np. dwusieczne BW_a, CW_a oraz AW_a spotykają się w jednym punkcie. Dowód przeprowadzi czytelnik sam, wzorując się na dowodzie poprzedniego twierdzenia.

Uwaga. Powyższe dwa twierdzenia można ująć w jedno następujące

Twierdzenie. Miejsce geometryczne punktów płaszczyzny równoodległych od trzech prostych, które przecinają się parami w trzech punktach nie leżących na jednej prostej, składa się z czterech punktów.

Są to na rys 81 punkty W, W_a, W_b, W_c .

Określenie. Trzy koła, o których mowa w twierdzeniu niniejszego paragrafu, nazywamy *zawpisanymi w trójkąt $\triangle ABC$* .

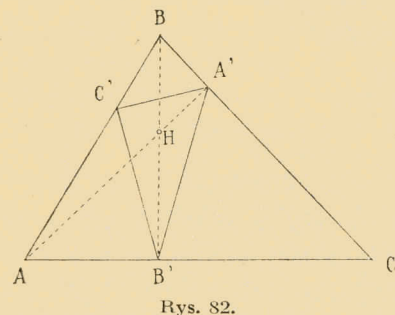
§ 125. Przyglądając się rysunkowi 81, dostrzegamy ciekawą fakt. W trójkącie $\triangle W_a W_b W_c$ odcinki AW_a, BW_b, CW_c

są wysokościami; przed chwilą widzieliśmy, że przecinają się one w jednym punkcie W , gdyż są zarazem dwusiecznymi w trójkącie $\triangle ABC$. Jeżeli na tym samym rysunku weźmiemy pod uwagę jakikolwiek inny trójkąt, np. trójkąt rozwartokątny $\triangle W_a W_b W$, dostrzeżemy również, że trzy jego wysokości przecinają się w jednym punkcie, mianowicie w punkcie W_c .*)

Powstaje pytanie, czy dostrzeżona własność jest ogólna? czy w każdym trójkącie trzy wysokości przecinają się w jednym punkcie?

Dowiedziemy zaraz, że odpowiedź na to pytanie wypada twierdząco.

§ 126. Twierdzenie. *Trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie (który nazywa się ortocentrem trójkąta).*



Rys. 82.

W trójkącie danym $\triangle ABC$ prowadzimy dwie wysokości AA' i BB' , łączymy punkty A' i B' i budujemy kąty $\sphericalangle BB'C'$ i $\sphericalangle AA'C'$, odpowiednio równe kątom $\sphericalangle BB'A'$ i $\sphericalangle AA'B'$. W ten sposób otrzymamy trójkąt $\triangle A'B'C'$.

Przedewszystkim dowiedzimy, że wierzchołek C'

tego trójkąta leży na prostej AB . Istotnie, w trójkącie $\triangle A'B'C'$ prosta AA' jest dwusieczną wewnętrzną, prosta zaś AC , jako prostopadła do dwusiecznej wewnętrznej BB' , musi być dwusieczną zewnętrzną. Na mocy twierdzenia § 124, przez punkt A musi przejść dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku C' .

Tak samo BB' jest dwusieczną wewnętrzną, a BC dwusieczną zewnętrzną, a więc przez B musi przejść dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku C' . Jak widzimy, dwusieczna tego kąta zewnętrznego przechodzi jednocześnie przez A i przez B , a więc zlewa się z prostą AB i wierzchołek C' musi leżeć na tej prostej.

*) Należy zbadać inne trójkąty na tym samym rysunku.

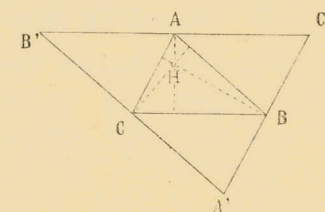
Jeżeli teraz poprowadzimy dwusieczną kąta wewnętrznego $\sphericalangle A'C'B'$, musi ona przejść zarówno przez H (§ 123), jak przez C (§ 124), a prócz tego musi być prostopadła do AB , z tym jest ona zarazem trzecią wysokością w trójkącie $\triangle ABC$.

Tak więc wszystkie trzy wysokości przecinają się w jednym punkcie H .

Przytaczamy tu inny jeszcze dowód, podany przez matematyka niemieckiego Gaussa.

Przez wierzchołki trójkąta $\triangle ABC$ poprowadźmy równoległe do przeciwległych boków. Tworzą one nowy trójkąt $\triangle A'B'C'$, przyczem punkty A, B, C są środkami boków nowego trójkąta.

Istotnie, figura $ABCB'$ jest równoległobokiem, a więc $B'C = AB$. Ale figura $ABA'C$ jest też równoległobokiem, zatem $AB = CA'$, skąd $B'C = CA'$. W taki sam sposób dowiedzimy, że B i A są środkami boków $A'C'$ oraz $C'B'$.



Rys. 83.

Jeżeli teraz w punktach A, B, C wystawimy prostopadłe do boków trójkąta $\triangle A'B'C'$, muszą one przeciąć się w jednym punkcie, a to na mocy twierdzenia § 121. Ale te same prostopadłe są zarazem wysokościami w trójkącie $\triangle ABC$ (dlaczego?), zatem wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

§ 127. W ten sposób poznaliśmy już cztery rodzaje punktów osobliwych trójkąta:

środek ciężkości G , t. j. punkt przecięcia się trzech środkowych (§ 81);
ortocentr H , t. j. punkt przecięcia się trzech wysokości (§ 126);
środek koła opisanego O , t. j. punkt przecięcia osi symetrii boków (§ 121);
środek koła wpisanego W , t. j. punkt przecięcia dwusiecznych wewnętrznych (§ 123).

3. *środków kół zawpisanych* W_a, W_b, W_c , z których każdy jest punktem przecięcia dwóch dwusiecznych zewnętrznych i jednej wewnętrznej (§ 124).

W celu łatwiejszego porozumienia się będziemy je stale oznaczali tymi samymi literami.

Ćwiczenia XVI. 1. Zbudować trójkąt, mając dane spodki trzech jego wysokości.

2. Zbudować trójkąt, mając dane środki trzech jego boków.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane

3. A, b, p .

4. A, B, p .

5. A, h_b, p .

6. Suma odległości trzech wierzchołków trójkąta od dowolnej prostej, nie przecinającej konturu trójkąta, jest trzy razy większa niż odległość środka ciężkości trójkąta od tej samej prostej.

Jak należy zmienić wysłowienie twierdzenia, aby pozostało ono słuszne i wówczas, gdy prosta przecina kontur trójkąta?

7. Jeżeli w $\triangle ABC$ ze środka każdego boku poprowadziliśmy prostopadłe do dwu boków, wówczas 1-o prostopadłe te przecinają się parami na wysokościach trójkąta $\triangle ABC$; 2-o prostopadłe poprowadzone od tego samego boku są sobie równe i każda z nich równa się połowie odpowiedniej wysokości trójkąta $\triangle ABC$; 3-o punkty przecięcia się prostopadłych są punktami Eulera*) w trójkącie $\triangle ABC$.

C. O położeniu dwóch kół względem siebie.

§ 128. **Określenie.** Linją środków dwóch kół będziemy nazywali prostą, łączącą ich środki.

Odległością środków dwóch kół będziemy nazywali odcinek, łączący ich środki.

§ 129. Ponieważ każda średnica jest osią symetrii koła, zatem linja środków dwu kół jest osią symetrii obu tych kół. Stąd wynika bezpośrednio prawdziwość następującego twierdzenia (rys. 86).

Twierdzenie. Jeżeli dwa okręgi mają spólny punkt, leżący po jednej stronie linii środków, wówczas mają drugi jeszcze punkt spólny, symetryczny z pierwszym względem linii środków.

§ 130. **Twierdzenie.** Jeżeli dwa okręgi mają punkt spólny, leżący na linii środków, wówczas nie mają żadnych innych punktów spólnych.

Istotnie, gdyby okręgi dane O, O' miały punkt spólny A , leżący na linii środków, a prócz tego inny jeszcze punkt B , nie leżący na tej linii, wówczas (na mocy poprzedniego twierdzenia) miałyby jeszcze trzeci punkt spólny B' , symetryczny z punktem B , co jest niedorzeczne.

Jeżeli natomiast przypuścimy, że koła O, O' mają dwa punkty wspólne A, B , leżące oba na linii środków, wówczas mają spólną średnicę AB , a więc zlewają się.

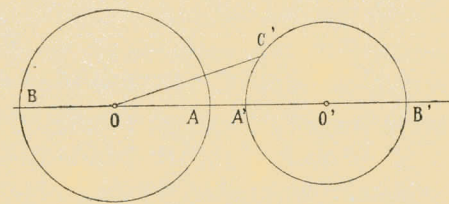
Określenie. Jeżeli dwa okręgi mają tylko jeden punkt spólny, powiadamy, że są one do siebie styczne, przy-

*) Punktem Eulera nazywamy punkt, który dzieli na połowy część wysokości, zawartą między ortocentrem trójkąta a wierzchołkiem.

czym rozróżniamy dwa rodzaje styczności: wewnętrzną i zewnętrzną stosownie do tego, czy jeden z tych okręgów leży wewnątrz drugiego, czy też każdy z nich leży zewnątrz drugiego (rys. 85 i 87).

§ 131. **Twierdzenie.** Jeżeli odległość środków dwóch okręgów jest większa od sumy ich promieni, wówczas okręgi nie mają wcale punktów spólnych.

Niech będą dane dwa koła O, O' . Oznaczmy ich promienie przez r, r' , odległość zaś środków przez s . Przypuśćmy również, że linja środków przecina nasze koła odpowiednio w punktach A, B oraz A', B' .



Rys. 84.

Zgodnie z założeniem mamy

$$s > r + r',$$

a więc

$$OA' = s - r' > r.$$

Widzimy tedy, że punkt A' leży zewnątrz koła O , a ponieważ OA' jest normalną, poprowadzoną z O do okręgu O' , zatem każdy inny punkt C' tego okręgu leży tymbardziej zewnątrz koła O , gdyż

$$OA' < OC'.$$

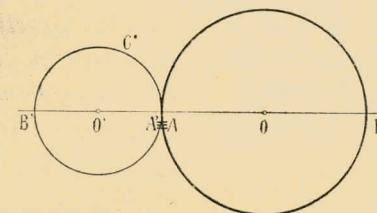
§ 132. **Twierdzenie.** Jeżeli odległość środków dwóch okręgów równa się sumie promieni, wówczas okręgi są do siebie zewnętrznie styczne.

Jeżeli

$$s = r + r',$$

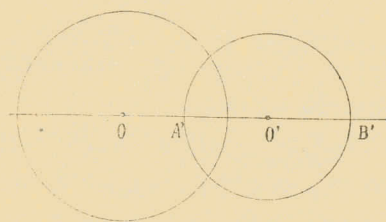
wówczas okręgi mają spólny punkt A na linii środków, a więc są do siebie styczne.

Jeżeli na okręgu O' obierzemy dowolny punkt C' , będziemy mieli nierówność $OA < OC'$ (dla czego?), okręgi są tedy istotnie zewnętrznie styczne.



Rys. 85.

§ 133. **Twierdzenie.** Jeżeli odległość środków jest mniejsza od sumy, lecz większa od różnicy promieni, wówczas okręgi mają dwa punkty wspólne (czyli przecinają się).



Rys. 86.

Załóżmy, że $r > r'$ i że $r - r' < s < r + r'$.

Z pierwszej nierówności wynika, że $s + r' > r$, czyli $OO' + O'B' = OB' > r$, zatem punkt B' okręgu O' leży zewnątrz koła O .

Z drugiej nierówności mamy

$$s - r' < r \text{ czyli } OO' - O'A' = OA' < r,$$

zatem punkt A' okręgu O' znajduje się wewnątrz koła O .

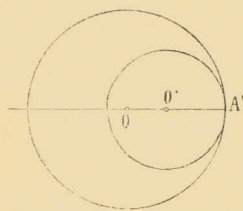
Ponieważ okrąg O' łączy dwa punkty A', B' , z których jeden leży wewnątrz, drugi zewnątrz okręgu O , zatem okręgi te mają dwa punkty wspólne (§ 35, str. 21).

§ 134. Twierdzenie. Jeżeli odległość środków równa się różnicy promieni, wówczas okręgi są wewnątrznie do siebie styczne.

Jeżeli $s = r - r'$,

czyli $r = s + r' = OO' + O'A'$ wówczas punkt A' , w którym linia środków przecina okrąg O' , musi leżeć na okręgu koła O .

Wszystkie inne punkty okręgu O' muszą leżeć wewnątrz koła O , gdyż odległość ich od punktu O jest mniejsza od normalnej OA' .



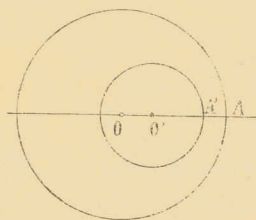
Rys. 87.

§ 135. Twierdzenie. Jeżeli odległość środków jest mniejsza od różnicy promieni, wówczas okręgi nie mają punktów wspólnych i jeden okrąg zawiera się całkowicie wewnątrz drugiego.

Jeżeli $s < r - r'$ czyli $OO' < OA - O'A'$, wówczas mamy

$$OO' + O'A' < r,$$

a więc punkt A' leży wewnątrz koła O . Ponieważ OA' jest normalną, przechodzącą przez środek koła O' , zatem z pośród wszystkich punktów okręgu O' punkt A' jest najbardziej oddalony od punktu O . Stąd wynika, że wszystkie inne punkty okręgu O' tymbardziej muszą leżeć wewnątrz koła O .



Rys. 88.

§ 136. Porównywując odległość środków dwóch kół z ich promieniami, dowiedliśmy pięciu następujących twierdzeń:

- jeżeli $s > r + r'$, każdy okrąg leży zewnątrz drugiego;
- „ $s = r + r'$, okręgi są zewnątrznie styczne do siebie;
- „ $r + r' > s > r - r'$, okręgi przecinają się w dwóch punktach;
- „ $s = r - r'$, okręgi są wewnątrznie do siebie styczne;
- „ $s < r - r'$, jeden okrąg leży całkowicie wewnątrz drugiego.

Jak widzimy, wyczerpaliśmy tu wszelkie możliwości: innych przypuszczeń co do odległości środków dwu kół uczynić nie można. Ponieważ zarówno wszystkie założenia naszych twierdzeń, jak i płynące z nich wnioski wyłączają się nawzajem, zatem wszystkie pięć twierdzeń mamy prawo odwrócić.

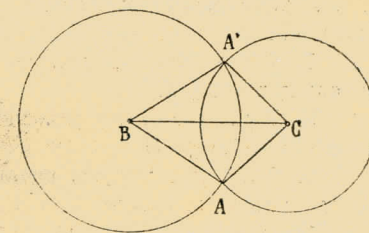
Czytelnik sam sformułuje te twierdzenia odwrotne.

§ 137. Możemy teraz rozwiązać zasadnicze zadanie konstrukcyjne, dotyczące budowania trójkątów.

Zadanie. Zbudować trójkąt tak, by boki jego równały się trzem danym odcinkom a, b, c .

Ustaliliśmy poprzednio (§ 68), że każdy bok trójkąta jest mniejszy od sumy dwu drugich jego boków, lecz większy od ich różnicy. Zadanie byłoby niemożliwe do rozwiązania, gdyby dane odcinki a, b, c nie spełniały tego warunku; przypuśćmy tedy, że warunek ów jest spełniony.

Na dowolnej prostej odkładamy odcinek a . W ten sposób mamy już wierzchołki B, C trójkąta. Z wierzchołków tych, jako ze środków, kreślimy koła $(B)c$ oraz $(C)b$. Na mocy § 133, okręgi tych kół przecinają się w dwóch punktach, leżących symetrycznie względem linii środków BC . Mamy tedy trójkąty $\triangle BA'C$ oraz $\triangle BAC$, leżące po dwóch stronach linii środków i równe sobie; każdy z nich odpowiada warunkom zadania.



Rys. 89.

Uwaga. W § 68 dowiedliśmy, że w trójkącie każdy bok musi być większy od różnicy, lecz mniejszy od sumy dwu drugich boków. Poznaliśmy wówczas warunek konieczny istnienia trójkąta: o ile trzy jakieś odcinki nie spełniają tego warunku, nie można z nich zbudować trójkąta.

Pozostawało jednak do rozstrzygnięcia pytanie: czy z każdego trzech odcinków spełniających powyższy warunek można zbudować trójkąt? Innymi słowy: czy jest to zarazem warunek wystarczający do istnienia trójkąta czy też są jeszcze jakieś inne warunki, którym muszą czynić zadość boki trójkąta?

Konstrukcja niniejszego zadania wykazała, że żadnych dodatkowych warunków nie ma, że więc nierówności

$$b - c < a < b + c$$

są warunkiem koniecznym i wystarczającym do istnienia trójkąta.

Ćwiczenia XVII. 1. Przez punkt dany na okręgu poprowadzić cięciwę równą danemu odcinkowi.

2. Z danego punktu zewnętrznego poprowadzić sieczną, na której koło O wyznaczyłoby cięciwę równą danemu odcinkowi a .

3. Jakie jest miejsce geometryczne środków kół o promieniu r , stycznych do danej prostej AB ?

4. Jakie jest miejsce geometryczne środków kół, zakreślonych promieniem r i stycznych do danego koła O ?

5. Dane są dwa okręgi O, O' ; wykreślić trzeci okrąg, styczny do dwu danych i mający promień równy danemu odcinkowi r .

6. Dany okrąg O i prosta m ; promieniem równym danemu odcinkowi r wykreślić okrąg, styczny do danego okręgu i do danej prostej. Zbadać szczegółowo zadanie w zależności od położenia prostej m i od wielkości promienia r .

7. Wykreślić okrąg, przechodzący przez dany punkt A i styczny do danej prostej m .

8. Wykreślić okrąg, przechodzący przez dany punkt A i styczny do danego okręgu O .

9. Jakie jest miejsce geometryczne środków kół, stycznych do danego okręgu w danym jego punkcie?

10. Dany jest okrąg O , na nim punkt A oraz drugi punkt B nie leżący na okręgu; wykreślić taki okrąg, który przechodziłby przez punkt B i był w punkcie A styczny do okręgu O . [Wskazać: jakie jest miejsce środków kół, przechodzących przez A i B].

11. Dwa koła styczne do siebie wewnętrznym lub zewnętrznym w punkcie A mają w tym punkcie wspólną prostą styczną.

12. Dany jest kąt $\angle \alpha$ i koło O wpisane w ten kąt; wpisać w ten sam kąt drugie koło, które byłoby zarazem styczne do koła O .

13. W dany odcinek kołowy wpisać koło tak, by dotykało ono cięciwy w jej środku.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

13. a, c, s_c . 14. a, u_a, d_C . 15. a, s_b, s_c . 16. b, s_b, s_c .

Zbudować równoległobok $ABCD$, mając dane:

17. a, b, e .

18. a, e, f .

19. Jakie jest miejsce geometryczne punktów, z których styczne do danego okręgu mają daną długość?*)

20. Zbudować miejsce geometryczne, o którym mowa w poprzednim zadaniu, mając dane: promień r koła i długość stycznej m .

21. Dane koło O i w nim cięciwa AB ; na przedłużeniu tej cięciwy znaleźć taki punkt M , żeby styczne, poprowadzone z tego punktu, równały się danemu odcinkowi d .

D. O kątach w kole i o łukach.

§ 138. Określenia. *Kątem środkowym nazywamy kąt (wkłęsły lub wypukły) utworzony przez dwa promienie tego samego koła. Wycinkiem kołowym nazywamy figurę, ograniczoną przez dwa promienie koła i przez łuk, zawarty między tymi promieniami. Odcinkiem kołowym nazywamy figurę, ograniczoną przez łuk koła i przez cięciwę, podpierającą ten łuk.**)*

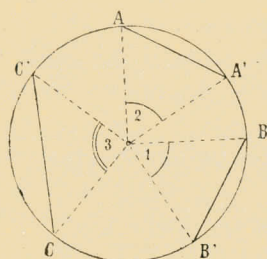
§ 139. Określenie. *Równymi łukami tego samego okręgu (lub równymi wycinkami tego samego koła) będziemy nazywali każde dwa jego łuki (lub wycinki), które zawierają się między ramionami równych kątów środkowych.*

Z określenia naszego wynika bezpośrednio, że średnica dzieli okrąg na dwa równe łuki (t. zw. półokręgi), koło zaś na dwa równe wycinki (t. zw. półkola).

§ 140. Twierdzenia. *W tym samym kole: 1) równym kątom środkowym (a więc i równym łukom) odpowiadają równe cięciwy; 2) większemu kątowi środkowemu (a więc i większemu łukowi) odpowiada większa cięciwa.*

*) Jeżeli z punktu A poprowadziliśmy styczne AX, AY do danego okręgu, wówczas każdy z równych odcinków AX, AY nazywamy długością stycznej, poprowadzonej z punktu A .

**) O cięciwie łączącej końce łuku powiadamy, że podpierają ten łuk. O kącie środkowym, zawierającym między ramionami dany łuk, mówimy niekiedy, że wspiera się na tym łuku.



Rys. 90.

Jeżeli mamy (rys. 90)

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2,$$

wówczas $\triangle OAA' = \triangle OBB'$ (dlaczego?); jeżeli natomiast mamy

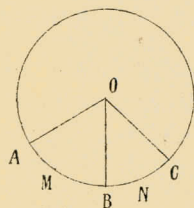
$$\sphericalangle 3 > \sphericalangle 2,$$

wówczas zważywszy, że boki OA , OA' trójkąta $\triangle OAA'$ równają się bokom OC , OC' trójkąta $\triangle OCC'$, ale kąty między tymi bokami nie są równe sobie, musi być (na mocy § 103)

$$CC' > AA'.$$

§ 141. Twierdzenia, zawarte w poprzednim paragrafie, tworzą układ zamknięty (co czytelnik szczegółowo wykaże), a więc twierdzenia odwrotne są prawdziwe.

Twierdzenia odwrotne. W tym samym kole równym cięciwom odpowiadają równe kąty środkowe (i równe łuki), większej zaś cięciwie odpowiada większy kąt środkowy (i większy łuk).

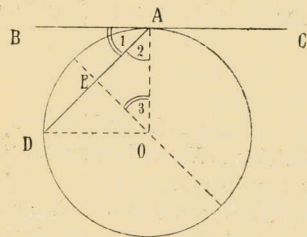


Rys. 91.

§ 142. Określenia. Jeśli dwa łuki $\overset{\frown}{AMB}$ i $\overset{\frown}{BNC}$ nie mają punktów wspólnych, oprócz końca B , wówczas łuk $\overset{\frown}{ABC}$ nazywamy sumą tamtych dwu łuków.

Analogicznie, różnicą dwu łuków $\overset{\frown}{ABC} - \overset{\frown}{BNC}$ nazywamy taki łuk $\overset{\frown}{AMB}$, który po dodaniu do odjemnika $\overset{\frown}{BNC}$ daje odjemną $\overset{\frown}{ABC}$.

§ 143. Twierdzenie. Kąt między styczną i cięciwą, przechodzącą przez punkt styczności, równa się połowie kąta środkowego, opierającego się na łuku, zawartym między ramionami pierwszego kąta.



Rys. 92.

Niech będzie dane koło O , w nim cięciwa DA i styczna BAC . Powiadam przedewszystkiem, że

$$\sphericalangle DAB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOD.$$

Ja też poprowadźmy $OE \perp DA$. W trójkącie prostokątnym $\triangle AEO$ kąty $\sphericalangle 2$ i $\sphericalangle 3$ dopełniają się do kąta prostego, ale tak samo $\sphericalangle 1$

i $\sphericalangle 2$ dopełniają się (dlaczego?), a więc

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3^*).$$

Powiadam dalej, że $\sphericalangle CAD$ równa się połowie kąta wklęsłego $\sphericalangle AOD$.

Istotnie, promień OF , będący przedłużeniem dwusiecznej OE , jest dwusieczną kąta wklęsłego $\sphericalangle AOD$. Wystarczy tedy dowieść, że

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle AOF.^*)$$

Otóż równość ta jest oczywista, gdyż

$$\sphericalangle CAD + \sphericalangle 1 = \sphericalangle FOA + \sphericalangle 3 = \text{kątowi półpełnemu},$$

a poprzednio dowiedliśmy, że $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$.

§ 144. Określenie. Kątem wpisanym nazywamy kąt, utworzony przez dwie cięciwy, których punkt przecięcia leży na okręgu.

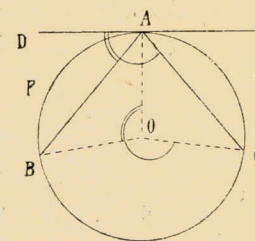
Twierdzenie. Kąt wpisany równa się połowie kąta środkowego, opierającego się na tym samym łuku.

Niech będzie dany kąt wpisany $\sphericalangle BAC$. Powiadam, że

$$\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \sphericalangle BOC.$$

Aby tego dowieść, wystarczy przez punkt A poprowadzić styczną DA i zauważyć, że mamy

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC - \sphericalangle DAB.$$



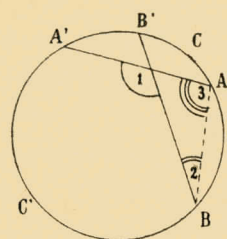
Rys. 93.

Na mocy poprzedniego twierdzenia kąty $\sphericalangle DAC$ i $\sphericalangle DAB$ są dwa razy mniejsze od kątów środkowych, opierających się odpowiednio na łukach $\overset{\frown}{ABC}$ i $\overset{\frown}{AFB}$, a więc różnica ich jest dwa razy mniejsza od kąta środkowego, opierającego się na różnicy łuków $\overset{\frown}{ABC} - \overset{\frown}{AFB}$ czyli na łuku $\overset{\frown}{BEC}$. Tak więc istotnie

$$\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \sphericalangle BOC.$$

§ 145. Twierdzenie. Kąt między dwiema stycznymi, przecinającymi się wewnątrz koła, równa się sumie dwu kątów wpisanych, opierających się na łukach, które są zawarte między ramionami pierwszego kąta i przedłużeniami tych ramion.

*) Oczywiście, równość ta wynika również ze spostrzeżenia, że kąty $\sphericalangle 1$ i $\sphericalangle 3$ mają ten sam zwrot, a ramiona ich są odpowiednio do siebie prostopadłe (§ 77). To samo dotyczy kątów $\sphericalangle CAD$ i $\sphericalangle AOF$.

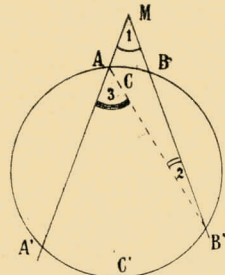


Rys. 94.

Niech będą dane dwie sieczne AA' , BB' , przecinające się wewnątrz koła w punkcie M .

W trójkącie $\triangle AMB$ kąt $\sphericalangle 1$ jest zewnętrznym, a więc $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3$,
te zaś dwa kąty są oba wpisane i opierają się: jeden na łuku $\widehat{ACB}$, drugi na łuku $\widehat{BC'A'}$.

§ 146. Twierdzenie. Kąt między dwiema siecznymi, które przecinają się w punkcie zewnętrznym, równa się różnicy dwóch kątów wpisanych, opierających się na łukach zawartych między ramionami pierwszego kąta.



Rys. 95.

Jeżeli mamy dwie sieczne MAA' , MBB' i jeżeli połączymy punkty A i B' , wówczas w trójkącie $\triangle AMB'$ kąt $\sphericalangle 3$ jest zewnętrznym, mamy więc

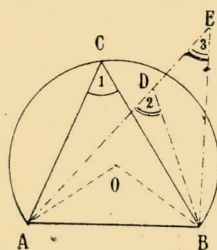
$$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 1,$$

$$\text{zatem } \sphericalangle 1 = \sphericalangle 3 - \sphericalangle 2,$$

kąty zaś $\sphericalangle 2$ i $\sphericalangle 3$ są oba wpisane i opierają się: jeden na łuku $\widehat{ACB}$, drugi na $\widehat{A'C'B'}$.

§ 147. Wyniki, osiągnięte w trzech ostatnich paragrafach (§§ 144, 145, 146), dadzą się streścić w następujący sposób:

Jeżeli na odcinku AB , jako na cięciwie, wykreślimy łuk, wówczas jakkolwiek obralibyśmy punkt C na tym łuku, zawsze kąt wpisany $\sphericalangle 1$ musi być stały, gdyż równa się on połowie stałego kąta środkowego $\sphericalangle AOB$.*) Jeżeli natomiast obierzemy dowolny punkt D wewnątrz koła lub dowolny punkt E zewnątrz koła, otrzymamy kąty $\sphericalangle 2$ i $\sphericalangle 3$, z których pierwszy jest większy od kąta wpisanego $\sphericalangle ACB$, drugi zaś jest mniejszy od tego samego kąta wpisanego.



Rys. 96.

*) O łuku ACB powiadamy, że o b e j m u j e o n kąt stały $\sphericalangle ACB$.

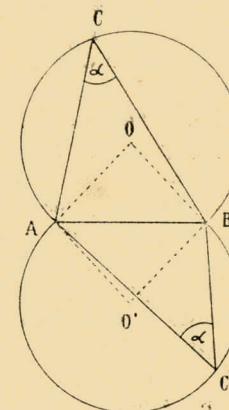
Mamy tedy znów układ twierdzeń zamknięty. Twierdzenia odwrotne muszą być prawdziwe, wobec czego mamy prawo wypowiedzieć następujące

Twierdzenie. Miejsce geometryczne punktów płaszczyzny, z których dany odcinek widać pod danym kątem, składa się z dwóch równych łuków kół, położonych symetrycznie względem danego odcinka i obejmujących dany kąt.*)

Np. na rys. 97 miejsce geom. punktów, z których widać odcinek AB pod kątem $\sphericalangle \alpha$ składa się z dwóch łuków $\widehat{ACB}$ i $\widehat{A'C'B'}$.

W szczególności mamy następujący wniosek, który często bywa potrzebny w rozmaitych zagadnieniach:

Wniosek. Miejscem geometrycznym punktów, z których dany odcinek widać pod kątem prostym, jest okrąg koła, wykreślony na tym odcinku, jako na średnicy.

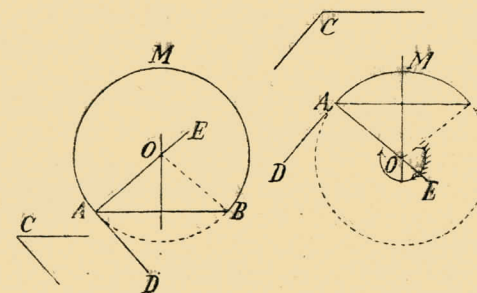


Rys. 97.

§ 148. Zadanie. Na danym odcinku AB wykreślić łuk, obejmujący dany kąt $\sphericalangle C$.

Przy końcu A danego odcinka budujemy $\sphericalangle BAD = \sphericalangle C$, wystawiamy prostą $AE \perp AD$ i prowadzimy oś odcinka AB . Punkt O , w którym ta oś przecina prostą AE , jest środkiem szukanego koła. Pozostaje już tylko wykreślić koło $(O)A$ i obrócić na nim łuk po odpowiedniej stronie cięciwy AB .

Łatwo przekonać się, że wykreślony łuk istotnie obejmuje kąt dany $\sphericalangle C$. Ponieważ mamy $AD \perp AO$, zatem AD jest styczną do koła, a więc kąt między AD i cięciwą AB (czyli kąt $\sphericalangle BAD = \sphericalangle C$) równa się połowie kąta środ-



Rys. 98.

*) Jeżeli punkt C nie leży na prostej AB , wówczas powiadamy, że z punktu C widać odcinek AB pod kątem $\sphericalangle ACB$.

kowego $\sphericalangle AOB$; ale połowie tego samego kąta środkowego równa się każdy kąt wpisany w łuk AMB .

Cwiczenia XVIII. 1. Łuki, zawarte między dwiema równoległymi cięciwami, są sobie równe.

2. Dany łuk podzielić na połowy.

3. Jeżeli dwa okręgi są do siebie wewnętrznje lub zewnętrznje styczne w punkcie A , wówczas każda sieczna, przechodząca przez punkt A , wyznacza na tych okręgach łuki podobne (t. zn. łuki, obejmujące taki sam kąt).

4. Koła O, O' są do siebie wewnętrznje styczne w punkcie M , przyczem koło O' ma za średnicę promień OM pierwszego koła; dowieść, że mniejsze koło dzieli na połowy każdą cięciwę większego koła, przechodzącą przez punkt M .

4a. Wypowiedzieć i udowodnić twierdzenie odwrotne.

4b. Powyższe dwa twierdzenia 4 i 4a (proste i odwrotne) ująć razem, posługując się pojęciem miejsca geometrycznego.

5. Czy twierdzenie 4 pozostaje prawdziwe, jeżeli koło O' przechodzi wprawdzie przez środek O pierwszego koła, nie jest jednak styczne do niego i jeżeli punkt M , z którego prowadzimy sieczne, leży na okręgu koła O' i jest w nim końcem linii środków OO' ?

6. Dwa okręgi OO' przecinają się w punktach K, L ; jeżeli poprowadzimy średnice $LOM, LO'N$, wówczas punkty M, K, N leżeć muszą na jednej prostej.

7. Przez stały punkt A , leżący wewnątrz danego koła, prowadzimy ruchomą cięciwę; co kreśli jej środek, gdy cięciwa obraca się dokoła punktu A ?

8. Dany jest pęk prostych z wierzchołkiem w punkcie A oraz punkt B ; jakie jest miejsce geometryczne spodków wszystkich prostopadłych, poprowadzonych z B do prostych pęku?

8a. Co stanie się, jeżeli zamiast prostopadłych, prowadzić będziemy pochyłe, tworzące z prostymi pęku kąt α ?

8b. W trójkącie $\triangle LMN$ bok MN jest stały, natomiast wszystkie inne jego elementy są zmienne; co kreślą spodki trzech wysokości trójkąta?

9. W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$ przeciwprostokątna AB jest stała, dwa drugie zaś boki są zmienne; co kreślą środki przyprostokątnych?

[Wykonać rysunek, biorąc $AB = 8$ cm.; obrać kilka różnych położzeń wierzchołka C kąta prostego, wykreślić trójkąt $\triangle ABC$, odpowiadający każdemu z tych położzeń, a w każdym z tych trójkątów wyznaczyć położenie środka M przyprostokątnej AC].

10. Prowadząc w danym kole dwie równoległe cięciwy AB, CD , otrzymujemy trapez równoramienny $ABCD$, wpisany w koło. Co kreślą środki jego boków i środki przekątnych, jeżeli wierzchołki A, B trapezu pozostają nieruchome, wierzchołki zaś C, D poruszają się po okręgu (tak jednak, że trapez pozostaje równoramienny)?

11. Na trójkącie $\triangle ABC$ opisujemy koło i prowadzimy dwusiecz-

czną kąta $\sphericalangle BAC$; dowieść, że gdy wierzchołek A porusza się po okręgu, dwusieczna przecina okrąg w stałym punkcie.

11a. W trójkącie $\triangle ABC$ oś symetrii boku BC przecina dwusieczną kąta $\sphericalangle BAC$ w punkcie D , leżącym na okręgu koła, opisanego na $\triangle ABC$.

11b. Jeżeli w $\triangle ABC$ bok BC oraz kąt $\sphericalangle A$ są stałe, inne zaś elementy trójkąta są zmienne, wówczas punkt D , w którym dwusieczna d_A przecina oś symetrii boku BC , jest stały.

12. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ środkowa s_c równa się połowie boku C , wówczas trójkąt jest prostokątny, a mianowicie kąt $\sphericalangle C$ jest prosty.

12a. W $\triangle ABC$, w którym kąt $\sphericalangle A$ jest prosty, kreślimy koło styczne do boków a, b i mające środek na boku c ; koło to przecina bok c w punkcie M i jest styczne do przeciwprostokątnej w punkcie D . Jeżeli na przedłużeniu boku b odłożymy $CE = AC$, wówczas punkty M, E, D muszą leżeć na jednej prostej.

13. Po dwóch stronach wspólnej cięciwy AB leżą dwa łuki (należące do dwu różnych kół). Na jednym z nich wybieramy dowolny punkt C i prowadzimy z niego proste CA, CB , które przecinają drugi łuk w punktach D, E . Dowieść, że łuk DE pozostaje stały, gdy punkt C porusza się po pierwszym łuku.

14. Z punktu zewnętrznego A prowadzimy do danego koła styczne AB, AC ; punkt D jest dowolnym punktem okręgu. Dowieść, że suma kątów $\sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD$ jest stała, dopóki D , poruszając się po okręgu, znajduje się zewnątrz trójkąta $\triangle ABC$. Co zajdzie, gdy punkt D znajdzie się w wierzchołku trójkąta? wewnątrz trójkąta?

15. Dane są trzy punkty A, B, C , nie leżące na jednej prostej; nie znajdując środka koła ABC , wyznaczyć dowolną ilość punktów, leżących na okręgu tego koła.

16. Dwa koła są wewnętrznje styczne w punkcie A . Niech cięciwa NM większego koła będzie styczna do mniejszego koła w punkcie S ; dowieść, że $\sphericalangle MAS = \sphericalangle NAS$.

17. Jeżeli w trójkącie równobocznym $\triangle ABC$ dwusieczne kątów $\sphericalangle A, \sphericalangle B$ przecinają okrąg koła opisanego w punktach A', B' , wówczas boki CA, CB dzielą na trzy równe części cięciwę $A'B'$.

18. Jeżeli dwa równe koła O, O' przecinają się według cięciwy AB , wówczas okrąg, wykreślony na AB , jako na średnicy, jest miejscem geometrycznym środków wszystkich odcinków, wyznaczonych przez koła O, O' na prostych pęku, mającego wierzchołek w A (lub w B).

19. Uzasadnić następujący (najprostszy ze znanych) sposób kreślenia stycznej w danym punkcie na okręgu:

mając dany okrąg O i na nim punkt P , wybieramy dowolny punkt A na okręgu i kreślimy koło $(A)P$, które przecina koło O w punktach P, R . Następnie kreślimy koło $(P)R$, które przecina koło $(A)P$ w punkcie S ; prosta PS jest żadaną styczną.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

20. a, A, h_a .

21. a, A, s_a .

22. $a, h_a, \sphericalangle(b, s_a)$.

23. r_a, r_b, C . 24. a, A, h_c . 25. $a, \sphericalangle(b, s_a), \sphericalangle(c, s_a)$.
 26. $c, C, \sphericalangle(c, s_c)$. 27. $a, c, \sphericalangle(b, s_c)$. 28. $b, h_c, \sphericalangle(c, s_b)$.
 29. u_a, u_b, C (porówn. zadanie 11) 30. $\sphericalangle(a, s_c), \sphericalangle(b, s_c), s_c$. [Jeżeli
 środkową CC' przedłużymy i na przedłużeniu odłożymy $C'C'' = CC'$,
 otrzymamy równoległobok $ACBC''$].
 31. $a, h_a, \sphericalangle(a, s_c)$. 32. a, A, s_b .

33. W trójkącie $\triangle ABC$ przedłużamy bok AC i odkładamy $CD = CB$; jeżeli bok AB jest nieruchomy, wierzchołek zaś C porusza się po płaszczyźnie tak, że kąt $\sphericalangle ACB$ pozostaje stały, co wówczas kreśli punkt D ?

34. Zbudować trójkąt, mając dane $c, a + b, C$.

Zbudować równoległobok $ABCD$, mając dane:

35. e, f, A . 36. $f, A, \sphericalangle(e, f)$. 37. $a, \sphericalangle(b, e), \sphericalangle(a, f)$.

38. Przez dany punkt A poprowadzić sieczną tak, by odciąć na danym okręgu łuk, równający się $\frac{1}{4}$ części tego okręgu. Ogólniej: łuk, obejmujący dany kąt $\sphericalangle \alpha$.

39. Dane jest koło; znaleźć taki punkt zewnętrzny M , by z dwóch łuków, zawartych między stycznymi MA, MB , ten łuk, którego strona wklęsła zwrócona jest ku M , był dwa razy większy od drugiego łuku.

40. Przez punkt A przecięcia się dwóch kół poprowadzić sieczną BAC tak, by było $BA = AC$.

41. Znaleźć na płaszczyźnie punkt, z którego wszystkie trzy boki trójkąta byłoby widać pod równymi kątami.

42. Zbudować trapez równoramienny, mając dane dwie jego podstawy i kąt między przekątnymi.

43. Dowolny łuk AB został podzielony na ilekolwiek, np. na 10 równych części w punktach $C_1, C_2, \dots, C_9$. Drugi punkt podziału C_2 łączymy z ostatnim C_9 i przedłużamy cięciwę C_2C_9 aż do przecięcia się w punkcie J z prostą AB . Dowieść, że mamy $C_9J = AC_9$.

44. Uogólnić poprzednie zadanie. Jak należy łączyć punkty w trójkącie $\triangle AJC_k$, żeby przy J otrzymać kąt 2, 3, 4... razy większy niż przy A ?

45. Z punktu zewnętrznego M prowadzimy do danego koła styczną MP i sieczną MAB . Punkt C niech będzie punktem przecięcia się dwusiecznej kąta $\sphericalangle APB$ z sieczną MAB . Dowieść, że $MP = MC$.

46. Dwusieczna każdego kąta trójkąta jest zarazem dwusieczną kąta między średnicą koła opisanego i wysokością, poprowadzonymi z tego samego wierzchołka.

47. Dany okrąg i na nim punkty D, S, W ; wpisać trójkąt tak, by dwusieczna, średnica koła i wysokość, poprowadzone z jednego wierzchołka, przechodziły odpowiednio przez punkty D, S, W .

E. O czworobokach wpisanych i opisanych.

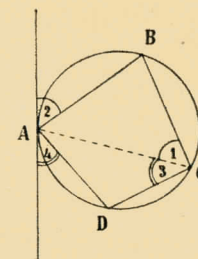
§ 149. Twierdzenie. W czworoboku wpisanym w koło suma dwu przeciwległych kątów równa się kątowi półpełnemu.

Aby się o tym przekonać, wystarczy z wierzchołka A czworoboku poprowadzić styczną do koła i zauważyć, że na mocy § 143 i 144, str. 101,

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2, \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4,$$

a więc

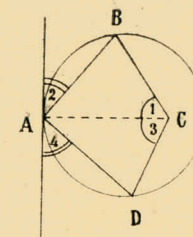
$$\sphericalangle BCD + \sphericalangle BAD = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle BAD = \text{= kątowi półpełnemu.}$$



Rys. 99.

§ 150. Twierdzenie przeciwne. Jeżeli czworobok nie daje się wpisać w koło, wówczas suma dwu przeciwległych kątów nie równa się kątowi półpełnemu.]

Przez wierzchołki A, B, D prowadzimy okrąg koła; wierzchołek C musi się znaleźć albo wewnątrz, albo zewnątrz tego koła. Połączmy, jak poprzednio, A z C i poprowadźmy styczną w punkcie A . Jeżeli punkt C leży wewnątrz koła (jak na rys. 100), mamy $\sphericalangle 1 > \sphericalangle 2, \sphericalangle 3 > \sphericalangle 4$ (dlaczego?), a więc $\sphericalangle BCD + \sphericalangle BAD > 2\delta$, gdzie δ oznacza kąt prosty. Czytelnik przeprowadzi sam odpowiedni dowód w przypadku, gdy wierzchołek C leży zewnątrz koła ABD .



Rys. 100.

§ 151. Twierdzenie. W czworoboku opisanym suma jednej pary boków przeciwległych równa się sumie drugiej pary.

Jeżeli E, F, G, H są punktami styczności boków czworoboku $ABCD$ z okręgiem wpisanym, mamy wówczas

$$BE = BF$$

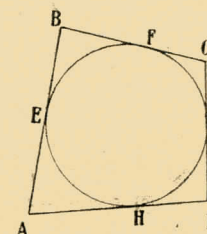
$$EA = AH$$

$$CG = CF$$

$$GD = DH.$$

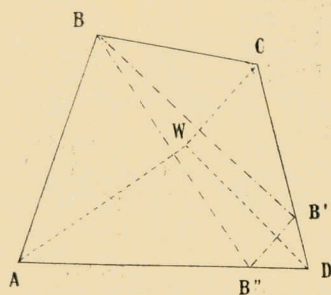
Dodając do siebie te cztery równości, mamy

$$BA + CD = BC + AD.$$



Rys. 101.

§ 152. Twierdzenie odwrotne (względem § 151). Jeżeli suma jednej pary przeciwległych boków równa się sumie drugiej pary, wówczas w czworobok można wpisać koło.



Rys. 102.

Niech będzie dany czworobok $ABCD$, w którym

$$AB + CD = BC + AD.$$

Założmy, że $CD > BC$.

Mamy

$$CD - BC = AD - AB.$$

Odlóżmy na bokach c, d odcinki $CB' = CB$ oraz $AB'' = AB$.

Otrzymamy trójkąty $\triangle BAB''$, $\triangle B''DB'$, $\triangle BCB'$, które są wszystkie trzy równoramienne

(dlaczego?) Wobec tego, jeżeli poprowadzimy dwusieczne kątów $\sphericalangle A$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$ w czworoboku, muszą one być osiami symetrii odcinków BB'' , BB' , $B'B''$, a ponieważ trzy te odcinki tworzą trójkąt $\triangle BB'B''$, zatem trzy osie symetrii muszą przecinać się w jednym punkcie W .

Ten punkt W jest równoodległy od boków czworoboku, a więc jest środkiem wpisanego w czworobok koła. Istotnie, dwusieczna AW jest miejscem punktów równoodległych od boków a, d ; dwusieczna CW jest miejscem punktów równoodległych od boków b, c ; dwusieczna DW jest miejscem punktów równoodległych od boków c, d .

Ćwiczenia XIX. 1. W czworoboku wpisanym poprowadzimy obie przekątne i w ten sposób otrzymujemy ośm kątów, zawartych między bokami i przekątnymi; dowieść, że wśród tych ośmiu kątów mamy cztery pary kątów równych.

2. Sformułować i uzasadnić twierdzenie odwrotne do poprzedniego.

3. Obliczyć kąty czworoboku wpisanego $ABCD$, jeżeli mamy

$\alpha) B = 2A, C = 3A, \beta) B = \frac{3}{2}A, A = 2C. \gamma) A : B : C = 1 : 2 : 3.$

4. Na jakich równoległobokach można opisać koła? Na jakich trapezach?

5. Jaką własność posiada czworobok wpisany, jeżeli $\alpha)$ dwa przeciwległe jego boki są do siebie równoległe; $\beta)$ dwa sąsiednie boki są sobie równe, $\gamma)$ dwa przeciwległe boki są sobie równe?

6. Jeżeli w dowolnym czworoboku poprowadzimy dwusieczne kątów wewnętrznych, wyznaczają one, przecinając się, czworobok wpisany. Czy można uogólnić to twierdzenie na dwusieczne kątów zewnętrznych?

7. Jeżeli w danym kole punkt A jest środkiem łuku, podpartego przez cięciwę BC , i jeżeli dwie dowolne sieczne AD, AE przecinają tę cięciwę w punktach B', C' , wówczas na czworoboku $B'C'ED$ można opisać koło.

8. W czworoboku wpisanym poprowadzimy dwusieczne dwóch przeciwległych kątów, przecinające okrąg koła w punktach E, F . Dowieść, że odcinek EF jest średnicą tego koła.

9. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ oznaczmy przez A_1, B_1, C_1 spodki jego wysokości, wówczas $\triangle A_1B_1C_1$ nazywa się ortocentrycznym względem trójkąta danego $\triangle ABC$.

Dowieść, że wysokości trójkąta danego $\triangle ABC$ są dwusiecznymi wewnętrznymi w trójkącie ortocentrycznym.

9a. Jak należy zmienić wyśłowienie poprzedniego twierdzenia, jeżeli trójkąt $\triangle ABC$ jest rozwartokątny?

10. Jeżeli w trójkącie ostrokątnym $\triangle ABC$ poprowadzimy trzy wysokości, przecinające koło opisane w punktach A', B', C' , wówczas:

1-o wysokości trójkąta $\triangle ABC$ są dwusiecznymi wewnętrznymi w trójkącie $\triangle A'B'C'$;

2-o boki trójkąta $\triangle A'B'C'$ są równoległe do boków trójkąta ortocentrycznego $\triangle A_1B_1C_1$ i są dwa razy od nich większe.

11. Jeżeli na bokach a, b, c trójkąta obierzemy dowolnie punkty A', B', C' , wówczas koła opisane na trójkątach $\triangle A'B'C$, $\triangle B'C'A$, $\triangle C'A'B$ muszą przeciąć się w jednym punkcie (zwanym punktem Steiner'a). [Wskaż ów punkt: Jeżeli koła, opisane na pierwszych dwu trójkątach, przecinają się w punkcie M , wówczas badamy czworoboki $A'MB'C$, $AB'MC'$].

12. Z punktu zewnętrznego P poprowadzimy dwie dowolne sieczne, przecinające okrąg w punktach A, B oraz A', B' . Jeżeli przez M, M', N, N' oznaczmy odpowiednio środki odcinków PA, PA', PB, PB' , wówczas na czworoboku $MNN'M'$ można opisać koło.

13. Jeżeli w czworoboku wpisanym przedłużymy dwa przeciwległe jego boki aż do spotkania, wówczas dwusieczna kąta między nimi musi być równoległa do dwusiecznej kąta między przekątnymi czworoboku.

14. Jeżeli przekątne czworoboku wpisanego $ABCD$ są do siebie prostopadłe i przecinają się w punkcie E , wówczas

1-o prosta, łącząca E ze środkiem boku czworoboku, jest prostopadła do przeciwległego boku, i odwrotnie;

2-o cztery proste, o których mowa, przecinają boki czworoboku w ośmiu punktach, które wszystkie leżą na jednym okręgu;

3-o rzuty punktu E na boki czworoboku $ABCD$ wyznaczają nowy czworobok, posiadający podwójną własność: daje się on zarówno wpisać w koło, jak i opisać na kole.

Zbudować czworobok wpisany, mając dane:

15. $a, b, A, R.$

16. $c, R, A, B.$

17. $a, b, A, B.$

18. $e, B, a, c.$

19. $a, b, R, \sphericalangle(e, f).$

20. $a, b, f, \sphericalangle(e, b).$

21. Jeżeli na kole opisałismy wielokąt o parzystej liczbie boków i ponumerowalismy kolejne jego boki, wówczas suma boków o numerach parzystych równa się sumie boków o numerach nieparzystych.

22. W wielokącie wpisanym, mającym parzystą liczbę wierzchołków, suma kątów o numerach parzystych równa się sumie kątów o numerach nieparzystych.

Zbudować czworobok opisany, mając dane:

- | | | |
|-------------------|-------------------|---------------------------------------|
| 23. $a, b, A, B.$ | 24. $b, c, d, e.$ | 25. $a, d, e, \sphericalangle(b, e).$ |
| 26. $p, A, B, C.$ | 27. $a, f, p, A.$ | 28. $a, p, A, C.$ |

29. Na stole ułożono cztery monety tak, że każda dotyka dwóch sąsiednich. Dowieść, że punkty styczności są wierzchołkami czworoboku wpisanego, środki zaś monet — wierzchołkami czworoboku opisanego.

30. Jeżeli, mając czworobok wpisany, wykreślimy na każdym jego boku jako na cięciwie łuk koła, wówczas łuki te przetną się parami w czterech punktach, które są wierzchołkami nowego czworoboku wpisanego.

31. W trójkącie prostokątnym ABC łączymy wierzchołek kąta prostego C ze środkiem M kwadratu, wykreślonego na przeciwprostokątnej, dowieść, że CM jest dwusieczną kąta prostego ACB .

W trójkącie $\triangle ABC$ oznaczamy środki boków odpowiednio przez A', B', C' , przez O i H środek koła wpisanego i ortocentr, przez M_1, M_2, M_3 środki odcinków AH, BH, CH .

32. Dowieść, że czworobok $M_1M_2A'B'$ jest prostokątem.

33. Na zasadzie poprzedniego twierdzenia dowieść, że środki boków A', B', C' , spodki wysokości A_1, B_1, C_1 oraz punkty M_1, M_2, M_3 leżą na jednym okręgu koła (tak zwane koło dziewięciu punktów albo też koło Feuerbacha).

34. Środek N koła dziewięciu punktów jest środkiem odcinka OH (zwanego odcinkiem Eulera). [Wskazówka: środek N musi leżeć na osiach symetrii odcinków $A'A_1, B'B_1$].

35. Promień koła dziewięciu punktów równa się połowie promienia koła opisanego.

36. Jeżeli z punktu K , dowolnie obranego na okręgu koła opisanego, poprowadzimy prostopadłe do trzech boków trójkąta $\triangle ABC$ (lub do ich przedłużeń), wówczas spodki tych prostopadłych leżą muszą na jednej prostej (t. zw. prosta Simsona).

37. Przez wierzchołki trójkąta $\triangle ABC$ prowadzimy równoległe do jego boków, które wyznaczają t. zw. trójkąt dopełniający $\triangle A'B'C'$ (przyczym A' leży naprzeciwko A). Dowieść, że koło dziewięciu punktów trójkąta $\triangle ABC$ jest styczne do kół dziewięciu punktów trójkątów $\triangle A'BC, \triangle B'CA, \triangle C'AB$, przyczym punkty styczności są środkami boków BC, CA, AB . [Wskazówka: niech H i H' będą ortocentrami trójkątów $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$; D niech będzie środkiem boku AC . Oznaczmy przez Q i Q' środki odcinków $BH, B'H'$. Dowieść, uwzględniając symetrię figury, że DQ, DQ' są środkami kół dziewięciu punktów i że D, Q, Q' leżą na jednej prostej].

ĆWICZENIA Z GEOMETRII PRAKTYCZNEJ.

Wiele ciekawych zagadnień geometrii praktycznej rozwiązać można nawet przy tym skromnym zasobie wiadomości, który dotąd zdobyliśmy. Przyrządy, potrzebne do tego celu są jaknajskromniejsze: *sznur* do mierzenia odległości, pewna ilość *drążków*, które służyć nam będą do wytykania linii prostych, oraz *węgielnica*.

Węgielnica w najprostszej swej postaci jest to prostokątna lub kwadratowa deseczka, umocowana na dowolnej podstawie (czyli na „pacholku”, jak mówili nasi geometrowie XVII w.). Na deseczce tej zaznaczone zostały w ten lub w inny sposób (np. wykreślone lub nacięte) dwie przecinające się proste. Proste te mogą przecinać się pod dowolnym kątem, dogodniej jest jednak wykreślić dwie prostopadłe do siebie proste. Aby ułatwić wyznaczanie prostych za pomocą tego przyrządu, dodajemy jeszcze t. zw. *celownicę*, którą, jak na rysunku 103, zastąpić można przez stalowe igły, niegiętkie i dobrze umocowane. Przy wszystkich pomiarach umieszczamy deskę węgielnicy poziomo.

Posługując się sznurem, drążkami i (w razie potrzeby) węgielnicą, rozwiązać następujące zadania:*)

1. Dana prosta m (t. zn. wytknięta za pomocą drążków); w oznaczonym jej punkcie A wystawić do niej prostopadłą (t. j. wytknąć za pomocą drążków i węgielnicy lub drążków i sznura).

2. Przez punkt A poprowadzić równoległą do danej prostej b , posługując się tylko: 1-o sznurem i drążkami, 2-o węgielnicą.

2a. Dostępne są tylko końce A, B , pewnego odcinka; przez punkt O poprowadzić równoległą do prostej AB , posługując się tylko sznurem i drążkami. [Wskazówka: własności równoległoboku].

3. Rozwiązać zadanie 1, jeżeli punkt A nie leży na prostej m .

4. Dane są dwie proste; podwoić kąt między nimi zawarty.

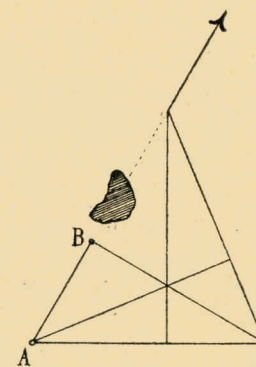
5. Dany kąt podzielić na połowy.

6. Dany odcinek podzielić na połowy.

7. Chcemy wytknąć prostą AB , przyczym na przedłużeniu odcinka AB znajduje się przeszkoda (np. las, dom lub t. p.); w jaki



Rys. 103.



Rys. 104.

*) Rzecz jasna, że o kreśleniu kół nie może być mowy w tych konstrukcjach, mamy natomiast prawo prowadzenia prostych w dowolnych kierunkach, prowadzenia prostopadłych i odkładania na danej prostej odcinków dowolnej długości.

bo jest do niej równoległa albo wreszcie po tym, że jest miejscem punktów równoodległych od ramion danego kąta. Natomiast linia płaska jest okręgiem lub częścią okręgu, jeśli 1) albo wszystkie jej punkty leżą w tej samej odległości od pewnego stałego punktu, 2) albo ze wszystkich jej punktów widać pod tym samym kątem pewien stały odcinek. Później spotkamy inne sposoby poznawania prostych i okręgów kół.

Zadanie 1. Stałym promieniem r kreślimy koła, styczne do danej prostej m , a do każdego z tych kół prowadzimy styczne, tworzące z prostą m kąt dany. Jakie jest miejsce geometryczne punktów styczności tych stycznych?*)

Wykreślamy trzy lub cztery takie koła i widzimy, że miejsce geom. składa się prawdopodobnie z dwóch prostych równoległych do m , odpowiednio do dwu stycznych, które możemy poprowadzić do każdego koła.

Z łatwością możemy dowieść słuszności tego przypuszczenia. W tym celu dowiedzimy najpierw, że odcinek BK prostopadły do m ma stałą długość.

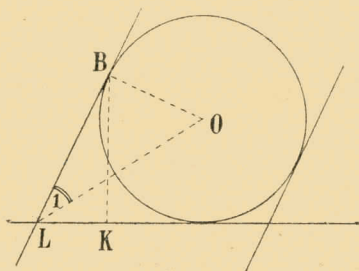
Jakoż w trójkącie $\triangle BOL$ bok BO i kąt $\sphericalangle 1$ są zawsze tej samej wielkości (dlaczego?), a więc i wielkość boku BL musi być stała. W trójkącie $\triangle BLK$ bok BL i kąt $\sphericalangle BLK$ są stałe, a więc i bok BK musi być stałej długości.

Tak więc punkty $B, B_1, B_2, \dots$ leżą niewątpliwie na prostej równoległej do m ; aby jednak twierdzić, że prosta ta jest miejscem geometrycznym punktu B , musimy jeszcze dowieść twierdzenia odwrotnego (że każdy punkt tej prostej jest punktem styczności prostej ruchomej BL i koła ruchomego O) albo też twierdzenia przeciwnego. Dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Zadanie 2. Po płaszczyźnie porusza się, nie zmieniając kształtu ani wielkości, trójkąt prostokątny $\triangle ABC$, przy czym wierzchołki A, B kątów ostrych ślizgają się po dwóch nieruchomych i prostopadłych do siebie

*) To samo zadanie można tak wyrazić: *wzdłuż prostej nieruchomej m przesuwa się druga prosta, nachylona do m pod stałym kątem. Ta druga prosta toczy przed sobą po prostej m koło o stałym promieniu; co kreśli punkt styczności koła i ruchomej prostej?*

Uczeń powinien w podobny sposób każde zagadnienie, dotyczące miejsc geometrycznych, wyrażać za pomocą pojęcia ruchu. Pouczającą rzeczą bywa również budowanie odpowiednich mechanizmów, zwłaszcza przegubowych, w celu zilustrowania ruchu, o którym mowa w zadaniu; w wielu razach mechanizm taki daje się z łatwością zbudować.



Rys. 107.

prostych OX, OY . Co kreśli wierzchołek C kąta prostego? Co kreśli środek przeciwprostokątnej AB ?

Wykreślenie trzech położenia punktu C wskazuje, że punkt ten prawdopodobnie porusza się po prostej. Że tak jest istotnie, dowodzimy w sposób następujący.

Czworobok $OBCA$ jest wpisany (dlaczego?), zatem $\sphericalangle COA = \sphericalangle ABC$. Ale kąt $\sphericalangle ABC$ jest stały, jako należący do trójkąta, który nie zmienia kształtu, zatem i kąt $\sphericalangle COA$ jest stały.

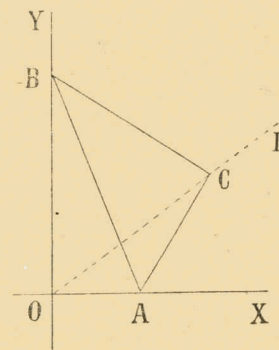
Punkt C , jak widzimy, porusza się tak, że prosta, łącząca go z nieruchomym punktem O , tworzy z nieruchomą półprostą OX stały kąt. Wobec tego torem punktu C musi być prosta (lub część prostej), przechodząca przez O i nachylona do OX pod kątem, równym kątowi $\sphericalangle B$ trójkąta danego.

Z kolei należałoby rozstrzygnąć pytanie, czy C porusza się po odcinku prostej OL , czy też po całej prostej? Wykreślenie skrajnych położenia trójkąta ruchomego może nam nasunąć odpowiedź na to pytanie.

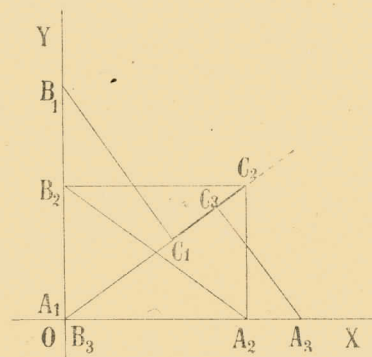
Przedewszystkim zauważmy, że (rys. 108) zarówno kąt $\sphericalangle BOA$, jak $\sphericalangle BCA$ są proste, zatem przy każdym położeniu ruchomego trójkąta stały odcinek BA jest średnicą koła, opisanego na czworoboku $OBCA$, wobec czego odległość wierzchołka C od O może co najwyżej równać się średnicy czyli odcinkowi AB . Przypadek ten zachodzi tylko wówczas, gdy czworobok $OBCA$ jest prostokątem czyli gdy przyprostokątna BC jest równoległa do OX (położenie $A_2B_2C_2$ na rys. 109). Przy każdym innym położeniu trójkąta mamy $OC < AB$.

Dwa skrajne położenia trójkąta zostały oznaczone na rys. 109 literami $A_1B_1C_1$ oraz $A_3B_3C_3$. Jeżeli trójkąt, znajdujący się w położeniu $A_1B_1C_1$, poruszać będziemy tak, by wierzchołek B zbliżał się do O , wówczas kąt $\sphericalangle CBO$, który początkowo równał się kątowi $\sphericalangle B$ trójkąta (a więc był ostry), rosnąć będzie wciąż. Przy położeniu $A_2B_2C_2$ kąt ten staje się prostym, następnie zaś rozwartym coraz większym, aż wreszcie staje się równy kątowi rozwartemu $\sphericalangle COY'$.

Aby zorientować się, w jaki sposób porusza się punkt C , przypomnijmy sobie, że koło opisanie na czworoboku $OBCA$ porusza się



Rys. 108.



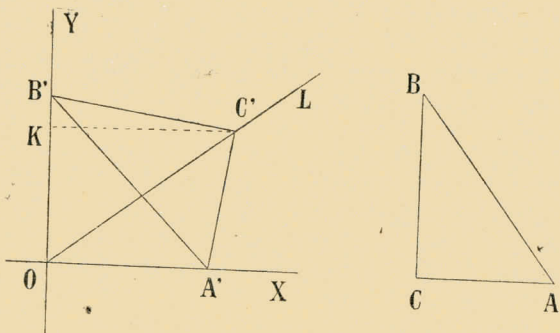
Rys. 109.

wprawdzie wraz z trójkątem $\triangle ABC$, ale wielkości swej nie zmienia. W kole tym kąt wpisany $\sphericalangle CBO$ wspiera się na cięciwie OC , jeśli więc kąt $\sphericalangle CBO$ rośnie i z ostrego staje się stopniowo prostym, potem zaś rozwartym, to cięciwa OC z początku rośnie, aż stanie się równą średnicy (położenie $A_2B_2C_2$ trójkąta), potem zaś maleje.

Jak widzimy, punkt C porusza się po prostej OL od punktu C_1 do C_2 z i powrotem do C_3 . Najmniejsza odległość od C do O równa się mniejszej przyprostokątnej, największa równa się przeciwprostokątnej trójkąta danego.*)

Chcąc jednak twierdzić, że miejscem geometrycznym punktu C jest odcinek C_1C_2 , musimy dowieść, że każdy punkt tego odcinka możemy uważać jako pewne położenie ruchomego punktu C , innymi słowy: że punkt C , poruszając się po C_1C_2 , nie przeskakuje żadnego punktu tego odcinka.**)

W tym celu wykażemy, że jeśli dowolny punkt odcinka C_1C_2 uważać będziemy jako wierzchołek kąta prostego, wówczas będziemy mogli w taki sposób zbudować trójkąt prostokątny równy danemu, że wierzchołki kątów ostrych znajdą się na półprostych OX , OY .



Rys. 110.

Istotnie, z dowolnego punktu C' odcinka C_1C_2 kreślimy okrąg promieniem a . Niech B' będzie punktem jego przecięcia się z półprostą OY . W punkcie C' wystawiamy prostą do $C'B'$; prosta ta nie mo-

*) Ustaliliśmy fakt, że punkt C nie może poruszać się po całej prostej OL , lecz jedynie po odcinku C_1C_2 . Dowód przeprowadziliśmy bezpośrednio, by pokazać, jak pożyteczną rzeczą bywa wykreślanie skrajnych położenia figury. Mogliśmy jednak dowód ten pominąć, gdyż przy badaniu twierdzenia odwrotnego (t. j. przy badaniu, czy każdy punkt prostej OL należy do poszukiwanego miejsca geometrycznego) wyszłoby samo przez się na jaw, że C porusza się tylko po odcinku C_1C_2 .

**) Takie przeskakiwanie jest nieprawdopodobne, lecz nie jest, teoretycznie rzecz biorąc, niemożliwe. Gdyby takie przeskakiwanie punktów zachodziło, nie moglibyśmy zbudować żadnego mechanizmu wyobrażającego ruch punktu C .

że być równoległa do OX (dlaczego?), przetnie więc tę półprostą w jakimś punkcie A' . Powiadam, że $\triangle A'B'C'$ równa się danemu trójkątowi $\triangle ABC$.

Jakoż czworobok $OB'C'A'$ jest wpisany (dlaczego?) a więc

$$\sphericalangle C'B'A' = \sphericalangle C'OA' = \sphericalangle B,$$

$$B'C' = a = BC,$$

$$\triangle A'B'C' = \triangle ABC.$$

zatem

Jak widzimy, istnienie trójkąta $\triangle A'B'C'$ zależy od tego, czy okrąg $(C')a$ ma punkty wspólne z półprostą OY . Oznaczając przez $C'K$ prostą padłą, poprowadzoną do OY (rys. 110), mamy:

jeżeli $a < C'K$, wówczas okrąg $(C')a$ i OY nie mają punktów wspólnych i trójkąt $\triangle A'B'C'$ nie istnieje;

„ $a = C'K$, wówczas okrąg $(C')a$ i OY mają jeden punkt wspólny, istnieje więc jeden tylko trójkąt $\triangle A'B'C'$;

jeżeli $C'K < a < C'O$ wówczas okrąg $(C')a$ i półprosta OY mają dwa punkty wspólne, istnieją więc dwa trójkąty $\triangle A'B'C'$;

„ $C'K < a$ oraz $C'O < a$, wówczas okrąg $(C')a$ i półprosta OY mają jeden punkt wspólny, istnieje więc jeden trójkąt $\triangle A'B'C'$.

Pierwszy z tych czterech przypadków nie może zachodzić, jeżeli C' leży na odcinku C_1C_2 (dlaczego?); co się tyczy ostatniego przypadku, to łatwo dostrzedz, że punkt C' nie może leżeć między O i C_1 , gdyż wtedy wierzchołek A' nie mógłby leżeć na półprostej OX (dlaczego?).

Tak więc istnieje zawsze przynajmniej jeden trójkąt $\triangle A'B'C'$, o ile C' leży między C_1C_2 , jeżeli zaś C' leży między C_3 i C_2 , to mamy dwa równe sobie trójkąty $\triangle A'B'C'$, co zgadza się w zupełności w wynikami, do których doszliśmy poprzednio.

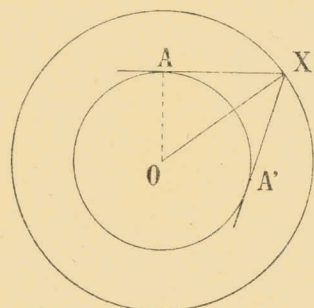
Co się tyczy miejsca geometrycznego środka Z przeciwprostokątnej AB , to wystarczy zauważyć, że odcinek OZ (na rysunku nie zaznaczony) równa się $\frac{1}{2} AB$, a więc jest stały. Punkt Z kreśli wobec tego okrąg $(O)r$, w którym $r = \frac{1}{2} AB$.

Zadanie 3. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, z których dane koło $(O)r$ widać pod danym kątem $\sphericalangle \alpha$ *)

Jeżeli X jest punktem, należącym do szukanego miejsca geometrycznego, wówczas kąt $\sphericalangle AXA'$ pomiędzy stycznymi równa się danemu kątowi $\sphericalangle \alpha$.

Połowa tego kąta musi być również stała czyli kąt $\sphericalangle OXA$ musi być stały, że zaś w trójkącie prostokątnym $\triangle OXA$ przyprostokątna $OA = r$ jest stała, zatem i przeciwprostokątna OX musi być stała.

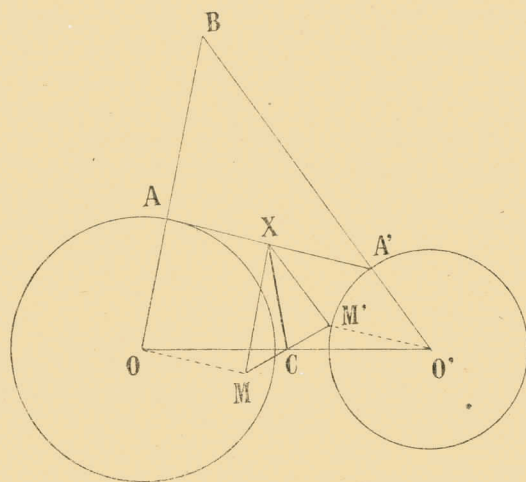
*) Jeżeli z punktu zewnętrznego P poprowadziliśmy styczne PA , PA' do koła, wówczas powiadamy, że z punktu P widzimy koło pod kątem $\sphericalangle APA'$.



Rys. 111.

kątem danym).

Zadanie 4. Dane są dwa koła $(O)r$ i $(O')r'$. Prowadzimy w nich promienie OA , $O'A'$, przecinające się w punkcie B pod stałym kątem. Jakie jest miejsce geometryczne środka X odcinka AA' ?



Rys. 112.

Widać odrazu, że tym miejscem geometrycznym musi być linia, której osią symetrii jest prosta OO' , gdyż punkt X przybierać może po dwu stronach tej prostej położenia symetryczne. Wykreślenie kilku położenia punktu X wskazuje, że mamy do czynienia z linią krzywą, a więc miejsce składa się prawdopodobnie z łuków kół symetrycznych względem OO' albo też jest okręgiem koła, którego środek znajduje się na prostej OO' .

Przekonamy się, że to drugie przypuszczenie jest prawdziwe. Zbudujmy równoległoboki $OAXM$, $O'A'XM'$. Mamy wówczas

$$OM = O'M',$$

a ponieważ odcinki te są do siebie równoległe, więc również

$$\sphericalangle COM = \sphericalangle CO'M', \quad \sphericalangle CMO = \sphericalangle CM'O'$$

czyli

$$\triangle OMC = \triangle O'M'C$$

i, co zatym idzie,

$$OC = O'C, \quad CM = CM'.$$

Punkt więc C jest środkiem stałego odcinka OO' , a odcinek XC jest środkową w trójkącie $\triangle MXM'$.

Zauważmy teraz, że $\sphericalangle MXM'$ jest stały, gdyż równa się stałemu kątowi $\sphericalangle OBO'$, a prócz tego mamy

$$MX = OA = r, \quad M'X = O'A' = r',$$

zatym trójkąt $\triangle MXM'$ zmienia wprowadzając swe położenie (mianowicie obraca się dookoła punktu C), lecz nie zmienia ani kształtu, ani wielkości (II cecha równości trójkątów).

Widzimy więc, że punkt X leży zawsze na okręgu koła, którego środkiem jest punkt C , promień zaś równa się środkowej takiego trójkąta, w którym dwa boki równają się promieniom kół danych, kąt zaś między tymi bokami równa się kątowi stałemu $\sphericalangle OBO'$.

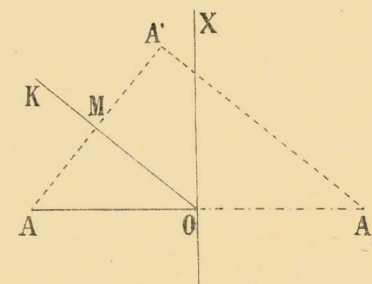
Dowód twierdzenia odwrotnego nie przedstawia trudności. Budujemy mianowicie trójkąt $\triangle MXM'$ tak, by punkt C był środkiem boku MM' i żeby było $MX=r$, $M'X=r'$, a zarazem żeby kąt $\sphericalangle MXM'$ równał się danemu kątowi; wierzchołek X znajduje się wówczas na kole, będącym domniemanym miejscem geometrycznym. Pozostaje poprowadzić promienie OA , $O'A'$ równoległe do MX , $M'X$ i dowieść, że $AX = A'X$.

Zadanie 5. Dane są dwa punkty nieruchome A , O ; przez O prowadzimy wszelkie możliwe proste i względem każdej z nich znajdujemy punkt A' symetryczny z A . Jakie jest miejsce geometryczne punktu A' ?

Prosta AO musi być osią symetrii szukanego miejsca geometrycznego (dlaczego?) Jeżeli poprowadzimy prostą OX prostą do AO , wówczas obraz symetryczny punktu A względem osi OX znajdzie się w punkcie A_1 . Jeżeli prosta OX zbliża się do AO , obraz punktu A zbliża się do tego punktu; gdy wreszcie OX zlewa się z AO obraz punktu A zlewa się z samym punktem A .

Tak więc miejsce geometryczne jest linią, przechodzącą przez A i A_1 i symetryczną względem prostej AO ; stąd wnosimy, że według wszelkiego prawdopodobieństwa miejscem geometrycznym punktu A' jest okrąg koła, którego średnicą jest AA_1 .

Przypuszczenie to łatwo sprawdzić. Niech OK (rys. 113) będzie dowolną prostą, przechodzącą przez O i niech M będzie rzutem punktu



Rys. 113.

A na oś OK , zaś A' niech będzie obrazem symetrycznym punktu A względem tej samej osi. Łączymy A' z A_1 .

Ponieważ $AM = MA'$, $AO = OA_1$,
zatem $OM \parallel A'A_1$,

czyli kąt $\sphericalangle AA'A_1$ jest prosty.

Miejscem więc punktu A' jest istotnie okrąg $(O)A^*$.

Zadanie 6. W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$ ($CA = CB$) prowadzimy dowolną prostą CL , znajdujemy obraz symetryczny B' punktu B względem osi CL i łączymy B' z A . Niech proste AB' , CL przecinają się w punkcie X . Znaleźć miejsce geometryczne punktu X .

Jeżeli prosta CL zlewa się z bokiem CB , wówczas B' (a więc i X) zlewa się z B . Jeżeli CL przybiera położenie $CK \perp AB$, wówczas B' zlewa się z A , a więc i X zlewa się z A . Wreszcie, jeżeli CL staje się dwusieczną kąta zewnętrznego $\sphericalangle DCB$, wówczas B' zlewa się z D (o ile, jak na rysunku, $DC = CB$), a X zlewa się z C .

Tak więc miejscem geometrycznym jest prawdopodobnie okrąg, opisany na trójkącie $\triangle ABC$. Jeżeli przypuszczenie nasze jest prawdziwe, to czworobok $ACXB$ musi być wpisany bez względu na położenie punktu X . Tak jest istotnie. Jakoż wiemy, że czworobok $KCMB$, jest wpisany (dlaczego?),
zatem

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2.$$

Ale w trójkącie $\triangle AB'B$ punkty K, M są środkami dwóch boków, zatem $KM \parallel AB'$ czyli

$$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3,$$

a więc

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$$

i czworobok $ACXB$ jest wpisany.

Ze względu na twierdzenie § 147 dowód twierdzenia odwrotnego jest zbyteczny.

*) W tym wypadku niema potrzeby dowodzić twierdzenia odwrotnego, gdyż wiemy, że miejscem wierzchołka kąta prostego, którego ramiona przechodzą przez dwa stałe punkty A, A_1 jest okrąg, zakreślony na średnicy AA_1 .

Ćwiczenia XX. 1. Dany jest okrąg $(O)r$ i stały punkt A ; znaleźć miejsce środków odcinków, poprowadzonych z A do punktów okręgu.

2. W trójkącie $\triangle ABC$ podstawa c jest nieruchoma, a różnica dwu drugich boków jest stała ($=m$). Znaleźć miejsce spodków prostopadłych, poprowadzonych z wierzchołków A i B do dwusiecznej kąta zmiennego $\sphericalangle C$ [Wskazówka: Wykreślić koła $(A)m$ i $(B)m$].

3. W czworoboku $ABCD$ boki a, b, d i przekątna c są stałej długości. Znaleźć miejsce geometryczne:

1-o środka X przekątnej f ;

2-o środka Z odcinka XY , gdzie X i Y są środkami przekątnych f, e .

4. Do danego koła O prowadzimy dwie styczne PS, PS' tak, że $\sphericalangle SPS' = \frac{2}{3}\delta$.

Znaleźć i wykreślić miejsce geometryczne:

1-o środka koła wpisanego w trójkąt $\triangle PSS'$.

2-o środka koła opisanego na trójkącie $\triangle PSS'$.

5. W trójkącie $\triangle ABC$ bok AB jest nieruchomy, kąt zaś $\sphericalangle C$ zachowuje stałą wielkość. Jakie jest miejsce geometryczne:

1-o środka W koła wpisanego?

2-o środków W_a, W_b, W_c kół zawpisanych?

3-o ortocentru H ?

6. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest nieruchoma; długości dwóch przyprostokątnych są zmienne. Co kreśli jego środek ciężkości?

7. Kąt prosty porusza się tak, że ramiona jego pozostają styczne do dwóch kół współśrodkowych; znaleźć miejsce

1-o wierzchołka kąta,

2-o środka odcinka, łączącego punkty styczności.

8. Dane jest koło $(O)r$; danym promieniem r' określimy koło, wyznaczające w kole $(O)r$ cięciwę danej długości. Jakie jest miejsce geometryczne środka tego drugiego koła?

9. Dane jest koło $(O)r$; z dowolnych punktów $A_1, A_2, A_3 \dots$ okręgu prowadzimy równe sobie i równoległe do siebie odcinki $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 \dots$; jakie jest miejsce punktu B ?

10. Dane koło i czworobok wpisany $ABCD$, w którym bok AB jest niewiadomy, bok zaś CD jest stałej długości. Co kreśla punkt przecięcia prostych BC, DA oraz punkt przecięcia się prostych AC, BD ?

11. Dwa koła zmiennej wielkości styczne są do siebie w punkcie X , a prócz tego styczne do nieruchomej prostej m w stałych punktach A, B . Co kreśli punkt X ?

12. Dana jest prosta m i na niej stały punkt A . Prowadzimy wszystkie koła, styczne do m w punkcie A , do każdego zaś z tych kół prowadzimy styczną, równoległą do innej danej prostej l . Znaleźć miejsce geometryczne punktu styczności X tych stycznych i wykreślonych przez nas kół.

13. Dany jest kwadrat $ABCD$. Z punktu A promieniem AB kreślimy koło, a do łuku zawartego wewnątrz kwadratu prowadzimy dowolną

styczną, która przecina boki BC , CD odpowiednio w punktach K , L . Znaleźć miejsce geom. środka koła, opisanego na trójkącie $\triangle AKL$.

14. Dane koło O , a w nim dwie prostopadłe do siebie i nieruchome średnice AOA' , BOB' . Prowadzimy dwa prostopadłe do siebie lecz ruchome promienie OX , OY , a przez ich końce kreślimy proste, równoległe do średnic OA , OB . Jakie jest miejsce geometryczne punktu Z , w którym przecinają się te dwie proste?

15. Dane dwa koła O' , O'' , styczne do siebie w punkcie A ; niech m będzie spólną ich styczną w tym punkcie, m' zaś i m'' niech będą dwie styczne równoległe do m . Po m porusza się punkt M , z którego prowadzimy styczne do obu kół, przecinające proste m' , m'' w punktach M' , M'' . Znaleźć miejsce punktu X , w którym przecinają się proste $M'O'$, $M''O''$.

16. Na płaszczyźnie dane są dwie przecinające się proste a , b i punkt P , leżący na a . Z punktu zmiennego X prowadzimy równoległą do b , która przecina prostą a w punkcie Y . Jakie jest miejsce punktu X , jeżeli mamy stale $XY = YP$?

17. Co kreśli wierzchołek C trójkąta $\triangle ABC$, w którym bok AB jest nieruchomy, środkowa zaś s_a ma stałą długość?

18. Dwa koła zmienne są styczne w stałych punktach P , P' do dwóch nieruchomych i przecinających się prostych, a prócz tego są styczne do siebie w punkcie X . Znaleźć miejsce geometryczne punktu X .

19. W trójkącie $\triangle ABC$ kąty są stałe, wierzchołek A jest nieruchomy, wierzchołek B porusza się po prostej danej m . Co kreśli trzeci wierzchołek? [Wskazówka: wykreślając różne położenia punktu C , uwzględnić to położenie, przy którym bok a leży na prostej m].

20. W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$, którego przeciwprostokątna AB jest nieruchoma, na przedłużeniu boku a odkładamy $CD = a$ i punkt D łączymy ze środkiem O koła opisanego. Znaleźć i wykreślić miejsca geometryczne

1-o punktu D ;

2-o punktu E , w którym prosta DO przecina bok b .

21. Dany jest stały kąt $\angle ABC$, wewnątrz niego stały punkt M , wreszcie kąt $\angle \alpha$, którego wierzchołek leży w punkcie M . Kąt $\angle \alpha$ obraca się dookoła M , pozostając zawsze równy sobie. Niech ramiona obu kątów przecinają się w punktach K , L ; z punktu M prowadzimy odcinek $MS \perp KL$. Znaleźć miejsce punktu S . [Wskazówka: poprowadzić $MD_1 \perp AB$ oraz $MD_2 \perp CB$ i połączyć D_1 i D_2 z punktem E].

22. Przez punkt C przecięcia się dwóch kół prowadzimy sieczną nieruchomą ACA' i sieczną ruchomą BCB' . Niech P będzie punktem przecięcia się prostych AB , $A'B'$. Znaleźć i zbudować miejsce geometryczne punktu P .

23. Na odcinku AB , jako na średnicy, kreślimy półokrąg; dowolny punkt C tej krzywej łączymy z A i z B , na przedłużeniu odcinka AC odkładamy $AX = CB$. Znaleźć miejsce punktu X . [Wskazówka: w punkcie A wystawiamy prostopadłą do średnicy i odkładamy na niej $AD = AB$].

24. W kole O mamy dane dwie nieruchome i prostopadłe do siebie średnice AOA' , BOB' . Na ćwiartce AB okręgu obieramy dowolny punkt M , przez który prowadzimy styczną, przecinającą w punkcie K przedłużenie średnicy AOA' . Niech W będzie środkiem koła wpisanego w $\triangle OMK$. Dowieść, że gdy M przesuwa się po okręgu, punkt W przesuwa się po bokach kwadratu, wpisanego w koło O .

Zbadać szczegółowo ruch punktu W w zależności od ruchu punktu M . Czy W może znaleźć się w wierzchołku kwadratu? w środku boku kwadratu? Jak należy zmienić warunki zadania, żeby punkt ruchomy wykreślił cały kontur kwadratu? [Wskazówka: $\triangle OWA \equiv \triangle OWM$].

25. Przy tych samych założeniach, co w poprzednim zadaniu, zbadać ruch środków W_1 , W_2 , W_3 kół zawpisanych, stycznych odpowiednio do boków OM , MK , OK .

26. Dane koło O i w nim promień nieruchomy OA . Kreślimy promień zmienny OB i prowadzimy $BC \perp OA$. Znaleźć miejsce geometryczne środka W koła, wpisanego w trójkąt $\triangle OBC$.

[Odpowiedź: cztery łuki, obejmujące każdy po $\frac{3}{4}$].

27. Po przedłużeniu średnicy koła O porusza się punkt A ; z punktu tego prowadzimy styczną i na niej odkładamy $AB = AO$. Co kreśli punkt B , gdy A porusza się po OA ?

28. Do koła wierzchołkiem A trójkąta stałego $\triangle ABC$ obraca się prosta, która przecina w punkcie D koło opisanie na tym trójkącie, a w punkcie E przecina prostą BC . Niech koło CDE przecina prostą AC w punkcie F , a prostą BF w punkcie G . 1-o Dowieść, że prosta GE obraca się dookoła stałego punktu; 2-o znaleźć miejsce punktu G .

29. Znaleźć miejsce geometryczne środków wszystkich równoległoków, wpisanych w dany czworobok $ABCD$ i mających boki równoległe do przekątnych AC , BD .

30. Z punktu stałego P prowadzimy do danego koła sieczną PAB , w punktach zaś A , B prowadzimy styczne AC , BC . Jakie jest miejsce geometryczne ortocentrum H trójkąta $\triangle ABC$, jeżeli sieczna obraca się dookoła punktu P ?

[Wskazówka: punkt symetryczny z ortocentrum H względem boku AB leży na okręgu koła, opisanego na $\triangle ABC$].

II. O rozwiązywaniu zadań konstrukcyjnych.

A. Przykłady analizy geometrycznej.

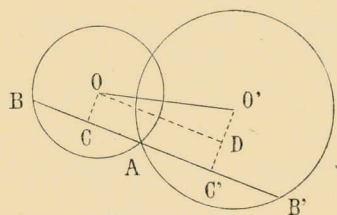
§ 154. Zadania, z którymi dotąd mieliśmy do czynienia, były tak zgrupowane, że rozwiązania ich wynikały nieraz bezpośrednio z twierdzeń, podanych i dowiedzionych w tekście.

lub z innych zadań, uprzednio rozwiązanych. W praktyce jednak związek między danym zagadnieniem a znanymi twierdzeniami geometrii bywa zwykle dość odległy. Aby ten związek odnaleźć, postępujemy w sposób następujący.

Zakładamy najpierw, że zadanie zostało już rozwiązane, innymi słowami: kreślimy figurę mniej więcej zbliżoną do poszukiwanej i zakładamy, że spełnia ona wszystkie warunki zadania. Następnie, kreśląc w razie potrzeby linie pomocnicze, staramy się wykazać, że nasze zadanie byłoby rozwiązane, gdyby się udało rozwiązać pewne inne zadanie. Dalej wykazujemy, że to drugie zadanie byłoby rozwiązane, gdybyśmy umieli rozwiązać trzecie jakieś zadanie, i t. d. Postępując w ten sposób, dochodzimy wreszcie do zadania, którego rozwiązanie jest nam znane.

Postępowanie to nosi nazwę *analizy geometrycznej*. Na czym ono polega, zrozumiemy najlepiej na przykładach.

§ 155. Zadanie I. Dane są dwa koła $(O)r$, $(O')r'$, przecinające się w punkcie A ; poprowadzić przez ten punkt sieczną w taki sposób, żeby suma cięciw, wyznaczonych na niej przez oba koła, równała się danemu odcinkowi m .



Rys. 115.

Przypuśćmy, że $r' > r$ i że koła oraz odcinek BB' , przedstawione na rys. 115, odpowiadają warunkom zadania. Jeśli poprowadzimy ze środków O, O' prostopadłe do cięciw, otrzymamy odcinek CC' , który równa się $\frac{1}{2}m$, jest więc znany. Odcinek ten jest zarazem odległością między dwiema

równoległymi do siebie prostymi $OC, O'C'$. Tak więc zadanie nasze byłoby rozwiązane, gdyby się udało rozwiązać następujące

Zadanie pomocnicze I. Przez dwa dane punkty O, O' poprowadzić dwie równoległe tak, żeby odległość między nimi równała się danemu odcinkowi $\frac{1}{2}m$.

Jeżeli teraz poprowadzimy ze środka mniejszego koła równoległą do prostej CC' , wówczas otrzymamy trójkąt prostokątny $\triangle OO'D$, w którym przyprostokątna OD równa się $\frac{1}{2}m$. Zadanie tedy pomocnicze byłoby rozwiązane, gdyby-

śmy potrafili zbudować trójkąt $\triangle OO'D$ czyli gdybyśmy rozwiązali następujące

Zadanie pomocnicze II. Zbudować trójkąt prostokątny $\triangle OO'D$, mając daną przeciwprostokątną OO' i przyprostokątną $OD = \frac{1}{2}m$.

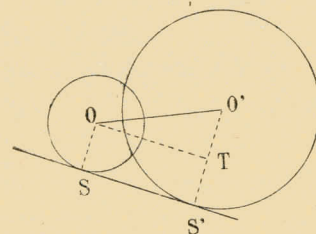
To drugie zadanie rozwiązać możemy. Istotnie, na OO' , jako na średnicy, kreślimy półkole, z punktu zaś O kreślimy koło promieniem równym $\frac{1}{2}m$; punkt przecięcia się tych kół jest wierzchołkiem D trójkąta.

Chcąc teraz otrzymać rozwiązanie zadania I, przedłużamy bok OD trójkąta i z punktu A prowadzimy prostą prostopadłą do prostej OD ; prostopadła ta jest żadaną sieczną.

Istotnie $OD = CC' = \frac{1}{2}m$, że zaś $BC = CA$, $C'B' = C'A$, zatem $BB' = m$.

§ 156. Zadanie II. Poprowadzić wspólne styczne do dwóch danych nierównych kół $(O)r$ i $(O')r'$.

I. Przypuśćmy znów, że $r' > r$ i że koła wraz ze styczną SS' na rysunku 116 odpowiadają warunkom zadania. Promienie $OS, O'S'$ są prostopadłe do stycznej SS' , a jeżeli przez O poprowadzimy równoległą do stycznej, przecinającą w punkcie T promień większego koła, otrzymamy trójkąt prostokątny $\triangle OO'T$, w którym $O'T = r' - r$ (dlaczego?).



Rys. 116.

Zadanie nasze rozwiążemy, o ile potrafimy rozwiązać następujące

Zadanie pomocnicze: Zbudować trójkąt prostokątny, w którym mamy daną przeciwprostokątną, oraz przyprostokątną, równającą się różnicy promieni $r' - r$.

Trójkąt taki budować umiemy. Po zbudowaniu go, wystarczy przedłużyć bok $O'T$ aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie S' , przez O poprowadzić promień OS równoległy do $O'S'$ i połączyć punkty S, S' .

Rzecz prosta, że możemy zbudować dwa trójkąty takie jak $\triangle OO'T$, położone symetrycznie względem linii środków OO' ; powinniśmy tedy otrzymać dwie styczne takie, jak SS' . Styczne te nazywamy *zewnętrznymi*.

Wynik ten był łatwy do przewidzenia, gdyż linja środków OO' jest osią symetrii figury, złożonej z dwóch kół $(O)r$ i $(O')r'$.

Rozwiązanie nasze wymaga, żeby było

$$OO' > O'T \text{ czyli } OO' > r' - r \text{ (dla czego?)}$$

Innymi słowy: żeby zadanie było możliwe do rozwiązania, koła dane albo nie powinny mieć wcale punktów wspólnych, albo powinny być zewnętrznie do siebie styczne, albo wreszcie powinny się przecinać.

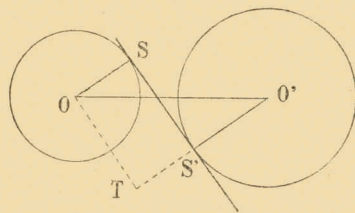
We wszystkich tych trzech przypadkach koła mają dwie wspólne styczne zewnętrzne.

W przypadku granicznym, gdy mamy

$$OO' = r' - r$$

czyli gdy koła są wewnętrznie do siebie styczne, trójkąt $\triangle OO'T$ nie istnieje, lecz wtedy prosta, prostopadła do OO' w punkcie styczności kół, jest wspólną styczną zewnętrzną danych kół.*)

II. Możemy wyobrazić sobie jeszcze inną figurę, odpowiadającą warunkom zadania, mianowicie taką, jak na rysunku 117.



Rys. 117.

Kreślimy znów promień OS , $O'S'$ prostopadłe do wspólnej stycznej SS' , przedłużamy promień $O'S'$, z punktu zaś O prowadzimy równoległą do stycznej, a więc prostopadłą do prostej $O'S'$.

W ten sposób otrzymujemy trójkąt prostokątny $\triangle OO'T$,

w którym $O'T = r + r'$ (dla czego?). Stwierdzamy znów, że zadanie nasze byłoby rozwiązane, gdybyśmy potrafili rozwiązać następujące

*) Uczeń wykreśli wspólne styczne zewnętrzne dla kilku par kół o tych samych promieniach r , r' i przekona się, że gdy odległość środków stopniowo maleje, tak iż koło $(O)r$ stopniowo przechodzi w koło styczne wewnętrznie do koła $(O')r'$, obie styczne wspólne coraz bardziej zbliżają się do siebie, aż wreszcie zlewają się w jedną prostą.

Zadanie pomocnicze. Zbudować trójkąt prostokątny $\triangle OO'T$, mając daną przeciwprostokątną OO' i przyprostokątną $O'T = r + r'$.

Zadanie to rozwiązać umiemy. Po rozwiązaniu go wypadnie tylko poprowadzić $OS // O'T$ i połączyć S z S' .

W ten sposób otrzymujemy wspólną styczną wewnętrzną dwóch kół.

Oczywista rzecz, że musi istnieć druga jeszcze styczna wewnętrzna, symetryczna z prostą SS' względem osi OO' .

Rozwiązanie nasze wymaga, żeby było

$$OO' > O'T \text{ czyli } OO' > r + r'.$$

Innymi słowy: koła dane nie powinny mieć wcale punktów wspólnych; otrzymujemy wówczas dwie styczne wewnętrzne.

W przypadku granicznym, gdy $OO' = r + r'$, trójkąt $\triangle OO'T$ przestaje istnieć; koła są wówczas zewnętrznie do siebie styczne, a prosta, prostopadła do osi OO' jest jedyną ich wspólną styczną wewnętrzną.*).

§ 157. Zadanie III. Zbudować trójkąt prostokątny mając daną przeciwprostokątną c i promień ρ koła wpisanego.

Analiza. Przypuśćmy, że zadanie jest rozwiązane i że $\triangle ABC$ na rysunku 118 przedstawi żadaną figurę. Niech W będzie środkiem koła wpisanego, A_1 , B_1 , C_1 niech będą punktami styczności tego koła z bokami a , b , c trójkąta.

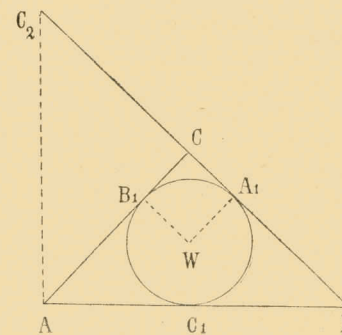
Jeżeli poprowadzimy promienie WA_1 , WB_1 , zauważymy odrazu, że

$$CA_1 = CB_1 = \rho \text{ (dla czego?)}$$

Zważywszy, iż $AB_1 = AC_1$, $BA_1 = BC_1$,

$$\text{mamy} \quad a = BC_1 + \rho$$

$$b = AC_1 + \rho$$



Rys. 118.

*) Uczeń znów przekona się, że gdy koła $(O)r$, $(O')r'$ zbliżają się do siebie, styczne wewnętrzne coraz mniej różnią się od siebie, aż wreszcie zlewają się w jedną prostą w chwili, gdy koła stają się zewnętrznie do siebie styczne.

zatem

$$a + b = c + \quad ,$$

czyli mamy daną sumę dwóch przyprostokątnych.

Jak widzimy, zadanie nasze dałoby się rozwiązać, gdybyśmy umieli rozwiązać następujące

Zadanie pomocnicze I: Zbudować trójkąt prostokątny, mając daną przeciwprostokątną c i sumę dwóch przyprostokątnych $a + b$.

Jeżeli przedłużymy bok a , na przedłużeniu jego odłożymy $CC_2 = b$ i połączymy A z C_2 , otrzymamy trójkąt $\triangle AC_2B$, w którym znamy boki BC_2 , AB oraz kąt $\sphericalangle BC_2A = \frac{1}{2}\delta$ (dlaczego?). Po zbudowaniu takiego trójkąta znajdziemy odrazu punkt C . Istotnie, punkt ten, jako wierzchołek kąta prostego, powinien leżeć na okręgu, którego średnicą jest bok AB .

Tak więc zadanie nasze potrafimy rozwiązać, gdyż umiemy rozwiązać następujące

Zadanie pomocnicze II: Zbudować trójkąt, mając dane dwa boki i kąt przyległy jednemu z nich (Ćwiczenie XV, 23, str. 87—88).

Konstrukcja. Budujemy kąt równy $\frac{1}{2}\delta$; na jednym jego ramieniu odkładamy odcinek $C_2A = a + b = c + 2p$ i z punktu A kreślimy koło promieniem równym odcinkowi c . Punkt B , w którym to koło przecina drugie ramie kąta, łączymy z punktem A , poczym na AB , jako na średnicy, kreślimy koło, przecinające prostą AC_2 w punkcie C . Trójkąt $\triangle ABC$ jest żądany.

Badanie. Zadanie nasze ma co najwyżej tyle rozwiązań, ile ich posiada zadanie pomocnicze II, gdyż koło, zbudowane na średnicy AB , przeciąć może tylko w jednym punkcie prostą AC_2 .

W zadaniu pomocniczym mamy $AB < AC_2$, kąt zaś $\sphericalangle AC_2B$ jest mniejszy od prostego, zachodzi tu więc przypadek, o którym była mowa pod numerem 3-o na str. 88 przy rozwiązywaniu ćwiczenia 23-go. Jeżeli poprowadzimy $AK \perp C_2B$, przekonamy się, że zadanie pomocnicze ma

jedno rozwiązanie, gdy $c = AK$
 dwa rozwiązania, „ $c > AK$,
 niema rozwiązań, „ $c < AK$.

Powiedzieliśmy wyżej, że nasze zadanie może mieć co najwyżej tyle rozwiązań, ile ich ma zadanie pomocnicze. Istotnie, gdyby koło, zakreślone na średnicy AB , nie przecięło wcale odcinka AC_2 , zadanie nasze nie dałoby się rozwiązać. Otóż, przypadek ten mógłby zajść wówczas, gdyby kąt $\sphericalangle C_2AB$ był prosty lub rozwarty, ale to jest niemożliwe.

Istotnie, gdyby kąt $\sphericalangle C_2AB$ był prosty, wówczas trójkąt $\triangle C_2AB$ byłby równoramienny (dlaczego?) i mielibyśmy

$$AB' = AC_2$$

$$\text{czyli} \quad c = c + 2p,$$

co jest niedorzeczne. Gdyby kąt $\sphericalangle C_2AB$ był rozwarty, wówczas mielibyśmy

$$\sphericalangle ABC_2 < \sphericalangle AC_2B \text{ (dlaczego?)}$$

$$\text{i, co za tym idzie,} \quad AC_2 < AB$$

$$\text{czyli} \quad c + 2p < c,$$

co znów jest niedorzeczne.

Tak więc zadanie nasze ma dokładnie tyle rozwiązań, co i zadanie pomocnicze.

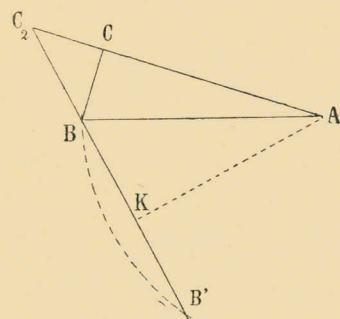
§ 158. Zadanie IV. Zbudować trójkąt, mając dane trzy jego środkowe.

Niech trójkąt $\triangle ABC$ będzie trójkątem żądanym; AA' , BB' , CC' niech będą jego środkowe, przecinające się w punkcie G .

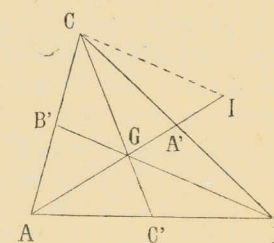
Oczywista rzecz, że znamy odcinki, wyznaczone na środkowych przez środek ciężkości G (§ 81, str. 59). Wobec tego, jeśli przedłużymy środkową AA' i na przedłużeniu odłożymy $A'I = A'G$, to otrzymamy trójkąt $\triangle GCI$, w którym

$$CI = GB = \frac{2}{3}s_b, \quad CG = \frac{2}{3}s_c, \quad GI = \frac{2}{3}s_a.$$

Umiemy zbudować ten trójkąt, gdyż mamy dane wszystkie trzy jego boki.



Rys. 119.



Rys. 120

24. c, C, ρ .	25. c, C, ρ_c .	26. c, R, ρ .
27. c, A, ρ_a .	28. $a + b, \rho_a, \rho_b$.	29. $a + b, C, \rho_c$.
30. $a + b, \rho, \rho_c$.	31. $a + b, c, \rho_c - \rho$.	32. $a + b, C, \rho_a - \rho_b$.
33. $a - b, \rho, \rho_c$.	34. $a - b, B, \rho$.	35. $a - b, h_a, \rho$.

36. Mając dany trójkąt $\triangle ABC$, wykreślić z jego wierzchołków, jako ze środków, trzy koła, z których każde byłoby styczne do dwu drugich.

37. Dane jest koło $(O)A$, na przedłużeniu zaś średnicy OA dany punkt B ; znaleźć na prostej AB taki punkt X , żeby styczna XC równała się odcinkowi XB .

[Wskazówka: przedłużamy BC aż do przecięcia się z kołem w punkcie D i badamy kąty trójkąta $\triangle DOB$].

38. Dany trójkąt $\triangle ABC$ i wewnątrz niego punkt K ; wpisać w trójkąt równoległobok tak, by punkt K był środkiem równoległoboku. [Wskazówka: jeżeli poprowadzimy $KL \parallel AB$ oraz $KM \parallel BC$, wówczas, znając punkty L, M na boku b , będziemy mogli z łatwością wyznaczyć wierzchołki D, E równoległoboku, leżące na tym samym boku b].

39. Zbudować czworobok $ABCD$, mając dane w płaszczyźnie rysunku środki M, N dwóch przeciwległych boków oraz cztery odcinki, równające się odpowiednio bokom a, b, c, d . [Wskazówka: jeżeli K, L są środkami przekątnych, to $KLMN$ jest równoległobokiem, w którym znamy długości boków (dla czego?); jeżeli P, S są środkami dwu innych boków czworoboku, wówczas $PLSK$ jest też równoległobokiem o znanych bokach, a prócz tego równoległoboki $KLMN, PLSK$ mają wspólny środek].

40. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty; wykreślić okrąg równoodległy od wszystkich czterech punktów.

41. Dany jest okrąg koła i na nim dwa punkty A, B ; wpisać w to koło trójkąt $\triangle ABC$ tak, żeby było $\sphericalangle A - \sphericalangle B = \delta$.

42. Dany jest kąt $\sphericalangle AOB$, którego wierzchołek O leży poza granicami rysunku. Mając dany punkt C na ramieniu AO , znaleźć na drugim ramieniu taki punkt B , żeby było $OA = OB$.

43. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane $a + b, p_a, p_b$. [Wskazówka: na dowolnej prostej m odkładamy odcinek $a + b$ i w jego końcach kreślimy promieniami danymi koła, styczne do prostej m .]

B. Metoda miejsc geometrycznych.

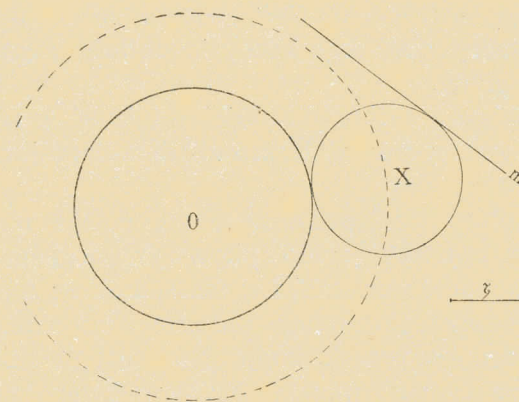
§ 159. Zapomocą analizy geometrycznej możemy każde zadanie konstrukcyjne sprowadzić do typu następującego:

„Znaleźć punkt X , który jest wyznaczony przez dwa znane nam warunki.”

Niech będzie dane np. do rozwiązania

Zadanie I. Danym promieniem r zakreślić koło styczne do prostej danej m , które byłoby zarazem zewnętrznie styczne do danego koła $(O)r'$.

Rzecz oczywista, że tym szukany punktem X musi być w danym razie środek koła, które mamy wykreślić.



Rys. 121.

Założmy, że rys. 121 przedstawia żadaną figurę. Skoro koło $(O)r'$ ma być zewnętrznie styczne do koła szukanego $(X)r$, odległość ich środków powinna równać się sumie promieni czyli musi być

$$OX = r + r'.$$

Ponieważ, dalej, koło (X) ma być styczne do prostej m , zatem odległość punktu X od prostej m winna równać się promieniowi koła.

W ten sposób zadanie nasze sprowadziliśmy do następującego zadania pomocniczego:

Zadanie pomocnicze. Znaleźć punkt X , spełniający jednocześnie dwa warunki: 1) odległość OX równa się sumie promieni $r + r'$; 2) odległość punktu X od prostej m równa się r .

Aby rozwiązać to zadanie pomocnicze, bierzemy najpierw pod uwagę pierwszy warunek.

1) Ponieważ punkt O jest dany, a miejscem geometrycznym punktów, odległych od punktu O o odcinek $r + r'$, jest okrąg, zakreślony z O promieniem $r + r'$, zatem punkt X musi leżeć na tym okręgu.

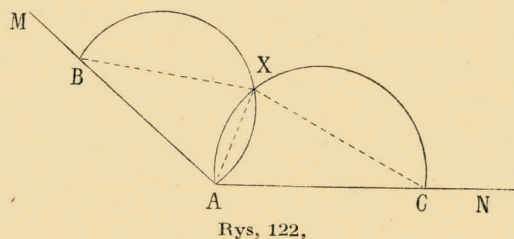
2) Przechodzimy teraz do warunku drugiego. Miejscem geometrycznym punktów, odległych od prostej m o dany odcinek r' jest układ dwóch prostych, równoległych do m i leżących symetrycznie względem niej w odległości r' od tej prostej. Wobec tego punktu X należy szukać na tych równoległych, a ponieważ leży on jednocześnie na kole, zakreślonym

z punktu O promieniem $r + r'$, zatem może leżeć tylko w punkcie przecięcia się tego koła z jedną lub drugą z powyższych równoległych.

Ilość rozwiązań zależy od ilości punktów przecięcia się obu miejsc geometrycznych. Uczeń zbada szczegółowo wszystkie możliwe przypadki.

Jak widzimy, postępowanie nasze polega na tym, że uwzględniamy najpierw tylko pierwszy warunek, któremu winien czynić zadość punkt X , i w ten sposób wyznaczamy jedno miejsce geometryczne tego punktu; następnie, uwzględniając tylko drugi warunek, znajdujemy drugie miejsce geometryczne tego samego punktu X . Wobec tego punkt szukany X znajdziemy, wykreśliwszy oba jego miejsca geometryczne.

§ 160. Zadanie II. Wewnątrz danego kąta $\angle MAN$ znaleźć taki punkt X , żeby dane odcinki AB , AC , leżące na ramionach kąta, widać było z punktu X pod danymi kątami $\angle \alpha$, $\angle \beta$.



Rys. 122.

Jeżeli rys. 122 przedstawia figurę żadaną, czyli jeżeli punkt X na tym rysunku spełnia dwa następujące warunki:

$$\angle BXA = \alpha, \quad \angle AXC = \beta,$$

wówczas punkt X leży 1) na łuku, wykreślonym na cięciwie AB i obejmującym kąt $\angle \alpha$; 2) na łuku, wykreślonym na cięciwie AC i obejmującym kąt $\angle \beta$.

Zadanie posiada jedno i tylko jedno rozwiązanie, jeżeli łuki te mają prócz punktu A drugi jeszcze punkt wspólny, czyli jeżeli figura $ABXC$ jest czworobokiem. Innymi słowami, aby zadanie posiadało rozwiązanie, trzeba i wystarcza, żeby zachodziła nierówność

$$\angle BAC + \angle BXC < 4\delta$$

czyli

$$\angle BAC + \angle \alpha + \angle \beta < 4\delta$$

§ 161. Czasem dopiero dłuższa analiza może wskazać nam ów punkt X , do znalezienia którego sprowadza się rozwiązanie zadania. Jako przykład podajemy następujące

Zadanie III. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane h_a , s_a , d_A .

Niech trójkąt $\triangle ABC$ na rys. 123 będzie żądany i niech AD , AE , AF będą odpowiednio wysokością, dwusieczną i środkową.

Przedewszystkim zauważmy, że trójkąt prostokątny $\triangle ADE$ daje się z łatwością zbudować, gdyż znamy jego przyprostokątną AD i przeciwprostokątną AE . To samo powiedzieć można o trójkącie $\triangle ADF$. Po zbudowaniu tych dwóch trójkątów znalazibyśmy wierzchołek A żadanego trójkąta, prostą, na której leży bok a , oraz środek F tego boku. Pozostałe dwa wierzchołki B, C trójkąta dałyby się łatwo znaleźć, gdybyśmy umieli wykreślić koło, opisanie na trójkącie szukanym $\triangle ABC$. Otóż koło to potrafimy wykreślić, jeżeli znajdziemy jego środek X , gdyż musi ono przechodzić przez znany nam punkt A .

Tak więc zagadnienie nasze sprowadziliśmy do następującego

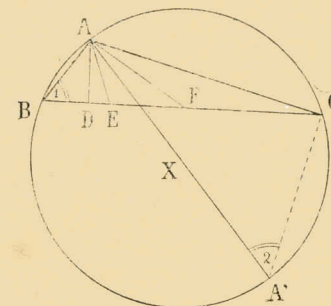
Zadania pomocniczego. Znaleźć środek koła, opisanego na niewiadomym trójkącie $\triangle ABC$, mając dane na rysunku trójkąty $\triangle ADE$, $\triangle ADF$, które wysokość, dwusieczna i środkowa tego niewiadomego trójkąta tworzą z bokiem jego a .

Aby rozwiązać to zadanie pomocnicze, musimy znaleźć dwa miejsca geometryczne dla punktu X .

Jedno z tych miejsc znamy oddawna: jest to oś symetrii boku a , którą możemy wykreślić, gdyż znamy środek F tego boku i prostą DF , na której leży bok a .

Co się tyczy drugiego miejsca geometrycznego, to znajdziemy go zapomocą dalszej analizy.

Niech AXA' będzie średnicą szukanego koła. Na rysunku 123 musi być $\angle 1 = \angle 2$ (dlaczego?), a ponieważ trójkąty $\triangle ABD$, $\triangle AA'C$ są oba prostokątne, zatem pozostałe ich kąty ostre muszą równać się sobie czyli musi być



Rys. 123.

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle A'AC \dots (1)$$

Założyliśmy, że AE jest dwusieczną kąta $\sphericalangle BAC$ czyli że mamy

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle DAE = \sphericalangle EAA' + \sphericalangle A'AC \dots (2)$$

Z równości (1) i (2) wynika, że

$$\sphericalangle DAE = \sphericalangle EAA'.$$

Tak więc, mając dany trójkąt $\triangle ADE$, podwoimy jego kąt $\sphericalangle DAE$ i otrzymamy prostą AA' , na której musi leżeć środek X szukanego koła.

Wykonanie konstrukcji pozostawiamy uczniowi.

Ćwiczenia XXII. 1. Mając dane promienie r, r' , zakreślić nimi dwa koła, styczne do siebie i do danej prostej m . [Uwzględnić różne rodzaje styczności].

3. Dane są na płaszczyźnie punkty A, A', B, B' ; wykreślić dwa koła spółśrodkowe tak, by jedno przechodziło przez A i A' , drugie przez B i B' .

4. Dane są dwa koła spółśrodkowe $(O)r, (O)r'$ oraz punkt A ; zbudować trzecie koło, przechodzące przez A i styczne do obu danych.

2. Zbudować dwa koła, styczne do siebie i do danej prostej m , przyczem środek jednego koła winien leżeć w danym punkcie O promień zaś drugiego powinien równać się danemu odcinkowi r .

5. Dane są na płaszczyźnie trzy równe sobie koła; wykreślić czwarte koło, styczne do wszystkich trzech.

6. Dany trójkąt $\triangle ABC$; znaleźć punkt, z którego wszystkie trzy boki trójkąta widać pod tym samym kątem.

7. Zbudować czworobok $ABCD$, mając dane: a, A, e, f oraz warunek, żeby na tym czworoboku można było opisać koło.

8. Na danym trójkącie równobocznym $\triangle AMN$ opisać kwadrat tak, by jeden jego wierzchołek leżał w punkcie A , boki zaś b i c przechodziły przez punkty M i N . [Wskazówka do analizy: poprowadzić przekątną AC].

9. W dane koło wpisać trójkąt prostokątny $\triangle ABC$ tak, by przyprostokątna a równała się danemu odcinkowi, i żeby przedłużenie drugiej przyprostokątnej b przechodziło przez dany punkt M , leżący zewnątrz koła. [Wskazówka do analizy: czy wielkość przyprostokątnej b jest wyznaczona, jeżeli znamy a i promień koła opisanego?].

10. W dane koło wpisać trójkąt prostokątny tak, by dwa ramiona kąta prostego przechodziły odpowiednio przez punkty M, N . Zbadać przypadki: 1) gdy oba punkty leżą wewnątrz koła; 2) gdy jeden leży wewnątrz, drugi zewnątrz koła; 3) gdy oba leżą zewnątrz koła.

11. Danym promieniem r wykreślić koło, któreby na dwu danych prostych wyznaczało cięciwy, równające się danym odcinkom a, b .

12. Dane koło O i prosta m ; wykreślić sieczną tak, by jeden jej koniec leżał na prostej m , zewnętrzna jej część równała się danemu odcinkowi a , cięciwa zaś, wyznaczona przez tę sieczną, żeby się równała innemu danemu odcinkowi b . [Wskazówka do analizy: jakie jest miejsce środka cięciwy, wyznaczonej przez tę sieczną? Jak sieczna nasza leży względem tego miejsca geometrycznego?]

13. Przez punkt przecięcia się dwóch kół poprowadzić w jednym z nich cięciwę tak, by drugie koło podzieliło ją na połowy.

14. Przez dany punkt A poprowadzić do danego koła sieczną tak, by cięciwa, wyznaczona na tej siecznej, została podzielona na połowy przez daną prostą m . [Wskazówka do analizy: poprowadzić promień, prostopadły do siecznej].

15. Dany trójkąt prostokątny $\triangle ABC$; między ramionami kąta prostego umieścić dany odcinek p tak, żeby końce jego leżały na ramionach tego kąta, środek zaś na przeciwprostokątnej. [Wskazówka do analizy: jeżeli odcinek DF odpowiada warunkom zadania, punkt zaś E jest jego środkiem, wówczas łączymy E z wierzchołkiem C kąta prostego. Czy odcinek CE jest nam znany?]

16. Dany trójkąt $\triangle ABC$ i punkt M na boku a ; wykreślić koło, styczne do boku a w punkcie M i wyznaczające równe cięciwy na bokach b, c .

17. Wykreślić koło, przechodzące przez dany punkt A i wyznaczające na dwu danych równoległych cięciwy, równające się danemu odcinkowi m .

18. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane A, B, p .

19. „ „ „ „ „ „ A, a, p .

20. „ „ „ „ „ „ $p, A + B, a$.

21. „ „ „ „ „ „ A, d_A, p .

22. W płaszczyźnie danego koła znaleźć taki punkt X , by suma stycznych $XA + XA'$ równała się siecznej, poprowadzonej z punktu X przez środek koła.

23. W dane koło wpisać trójkąt $\triangle ABC$, mając dany bok a oraz długość odcinka AA' , gdzie przez A' oznaczyliśmy punkt przecięcia się koła opisanego z przedłużeniem dwusiecznej wewnętrznej d_A .

24. Na danym czworoboku $ABCD$ opisać kwadrat. [Wskazówka do analizy: uwzględnić miejsce geom. § 147 oraz fakt, że przekątna kwadratu jest dwusieczną jego kąta].

25. Zbudować trójkąt prostokątny tak, by przyprostokątne a, b , (lub ich przedłużenia) przechodziły odpowiednio przez dane punkty L, M , dwusieczna zaś kąta prostego (lub jej przedłużenie) przechodziła przez punkt dany K , i żeby przyprostokątna CA równała się danemu odcinkowi b .

26. Dane cztery punkty A, B, C, D ; wykreślić kwadrat, którego boki przechodziłyby odpowiednio przez te punkty.

27. Z danych dwóch punktów O_1, O_2 , jako ze środków, wykreślić dwa równe koła tak, by wspólna styczna tych kół przechodziła przez dany punkt M .

28. Dane jest koło $(O)r$, punkty A, B nie leżące na nim i prosta m . Przez A i B poprowadzić okrąg koła tak, by wspólna cięciwa tych dwu kół była prostopadła do prostej m .

29. Znaleźć taki punkt X , by styczne, poprowadzone z niego do dwu danych kół, równały się danym odcinkom m, m' .

30. W danym kole $(O)r$ poprowadzić cięciwę, nachyloną pod kątem α do danej prostej m i równającą się danemu odcinkowi a .

31. Z danego punktu A zakreślić koło tak, by styczna, poprowadzona z innego danego punktu B , równała się danemu odcinkowi a .

32. Z danego punktu O zakreślić koło tak, by z innego danego punktu A widać je było pod kątem α . [Porówn. uwagę na str. 117].

33. Dane są dwa koła $(O)r, (O')r'$; wykreślić prostą tak, by przecięcia ona oba koła i wyznaczyła w nich cięciwy, równające się odpowiednio odcinkom danym a, a' .

34. W danym kole poprowadzić średnicę tak, by z danego punktu A widać ją było pod danym kątem α .

35. Dane są dwie równoległe m, m' , punkt A na prostej m i punkt K , nie leżący na żadnej z tych prostych. Przez K poprowadzić poprzeczną, przecinającą proste m, m' w takich dwu punktach B, B' , że $AB = AB'$.

36. W dane koło wpisać kwadrat tak, by przez dany punkt M przechodził bok tego kwadratu (lub przedłużenie boku). [Wskazówka do analizy: czy można wyznaczyć koło, wpisane w szukany kwadrat?]

37. Dane są dwa koła $(O)r, (O')r'$ wewnątrz siebie styczne w punkcie A ; w większym z tych kół poprowadzić cięciwę prostopadłą do OA tak, żeby część cięciwy, zawarta między prostą OA i okręgiem większego koła, została podzielona na połowy przez mniejszy okrąg.

38. Dane są trzy punkty A, B, C ; danym promieniem r zakreślić koło tak, by styczne, poprowadzone do niego z tych trzech punktów, równały się sobie.

39. W dane koło wpisać trójkąt tak, by przez dany punkt K przechodził bok a trójkąta (lub jego przedłużenie) i żeby kąty $\angle A, \angle B$ równały się danym kątom.

40. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane boki a, b oraz warunek, że musi być $\angle A = 2\angle B$.

41. Zbudować prostokąt $ABCD$, mając daną sumę $a + b$ oraz kąt ω .

[Wskazówka do analizy: na dwusiecznej kąta ω odkładamy $EF = \frac{1}{2}(a+b)$].

42. Dane są trzy proste równoległe do siebie; zbudować trójkąt równoboczny tak, by wierzchołki jego leżały na tych trzech prostych. [Wskazówka do analizy: na trójkącie opisać koło].

43. Na danym trójkącie $\triangle ABC$ opisać drugi trójkąt $\triangle A'B'C'$, mając dane kąty $\angle A', \angle B'$, i bok c' .

44. Dane są dwa koła $(O)r, (O')r'$; wykreślić odcinek AA' równoległy do danej prostej BC , równy danemu odcinkowi m i położony tak, że punkt A znajduje się na jednym okręgu, punkt zaś A' na drugim.

45. Zbudować czworobok $ABCD$, mając dane A, C, e, f, w .

46. W dany kwadrat wpisać drugi dany kwadrat.

47. Dane jest koło i w nim cięciwa AB ; wykreślić drugą cięciwę CD tak, by środek jej E leżał na AB i żeby równała się ona danemu odcinkowi m .

48. Z danego punktu O wykreślić koło, przecinające ramiona danego kąta w takich punktach A i B , że prosta AB jest równoległa do danej prostej m .

49. W dane koło wpisać czworobok $ABCD$, mając dane a, b, c, d . [Wskazówka do analizy: czy kąt $\angle D$ jest wyznaczony?]

50. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane A, s_a, h_a . [Wskazówka: jeżeli AA' jest środkową, wówczas na jej przedłużeniu odkładamy $A'A'' = s_a$ i staramy się zbudować $\triangle ABA''$].

50a. Dane dwa koła współśrodkowe i w nich dwa promienie; wykreślić styczną do mniejszego koła tak, by większe koło podzieliło na połowy odcinek tej stycznej, zawartej między dwoma danymi promieniami.

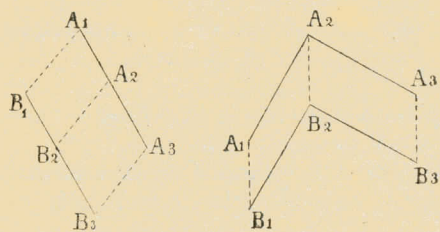
C. Metody przekształceń.

§ 162. Zapomocą analizy sprowadzamy rozwiązanie danego zadania do rozwiązania zadania pomocniczego, czyli konstrukcję figury szukanej sprowadzamy do konstrukcji figury pomocniczej. Otóż zdarza się nieraz, że figura pomocnicza znajduje się w bardzo prostym związku z figurą szukaną, że daje się ona otrzymać z niej zapomocą łatwego przekształcenia. Donajprostszych przekształceń należą: *przesunięcie* (całej figury lub pewnych jej elementów), *obróć* i *symetria względem osi*.

1. Przekształcenie przez przesunięcie.

§ 163. Określenie. Jeżeli przez wszystkie punkty $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ danej figury poprowadzimy równoległe i na nich odłożymy równe sobie odcinki $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = \dots = A_nB_n = \dots$, wówczas końce tych odcinków $B_1, B_2, B_3, \dots$ utworzą nową figurę, o której powiadamy, że została otrzymana z danej zapomocą *przesunięcia*.

Twierdzenie I. Po przesunięciu otrzymujemy z danego odcinka nowy odcinek, równy mu i do niego równoległy.



Rys. 124.

Twierdzenie II. Po przesunięciu otrzymujemy z danego kąta nowy kąt, mający ramiona odpowiednio równoległe do ramion danego kąta.

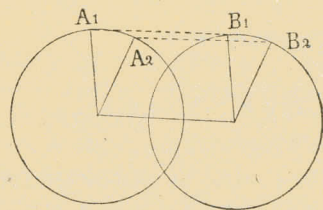
Uczeń dowiedzie sam tych dwu twierdzeń, kierując się np. załączonymi

rysunkami. Z twierdzeń tych wypływa

Wniosek. Po przesunięciu trójkąta otrzymujemy trójkąt równy danemu i mający boki odpowiednio równoległe do boków danego trójkąta.

Twierdzenie III. Po przesunięciu koła $[(O)A_1]$, otrzymujemy równe mu koło $(I)B_1$.

Jakoż z promieni $OA_1, OA_2, \dots$ otrzymujemy po przesunięciu równe im, a więc równe sobie odcinki $IB_1, IB_2, \dots$



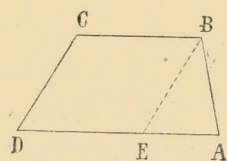
Rys. 125.

Równie łatwo dowieść można twierdzeń odwrotnych do poprzednich. Teraz możemy pojęcie przesunięcia zastosować do zadań konstrukcyjnych.

§ 164. Zadanie I. Zbudować

trapez, mając dane cztery jego boki a, b, c, d .

Jeżeli z punktu B poprowadzimy $BE \parallel CD$ (czyli jeżeli „przesuniemy” bok CD do wierzchołka B), otrzymamy, jako figurę pomocniczą, trójkąt $\triangle ABE$, w którym znamy wszystkie trzy boki, gdyż



Rys. 126.

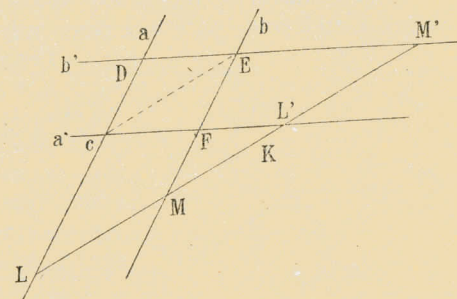
$$AB = a, BE = c, AE = d - b.$$

Po zbudowaniu trójkąta $\triangle ABE$ czytelnik sam zbuduje żądany trapez.

§ 165. Zadanie II. Równoległe a, b zostały przecięte dwiema drugimi równoległymi a', b' . Przez dany punkt K poprowadzić poprzeczną tak, by odcinek LM , wyznaczony na niej przez pierw-

szą parę równoległych, równał się odcinkowi $L'M'$, wyznaczonemu przez drugą parę.

Niech figura na rys. 127 odpowiada warunkom zadania. Dwie dane pary równoległych tworzą równoległobok $CDEF$. Jeżeli odcinek LM „przesuniemy” do punktu C , drugi jego koniec znajdzie się na



Rys. 127.

prostej b . Tak samo, jeżeli $L'M'$ przesuniemy do punktu C , drugi koniec tego odcinka znajdzie się na prostej b' .

Ale oba odcinki, otrzymane skutkiem przesunięcia odcinków $LM, L'M'$, muszą zlewać się w jeden odcinek, gdyż są sobie równe (ponieważ $LM = L'M'$ według założenia) i oba są równoległe do tej samej prostej LKL' . Ponieważ, dalej, koniec tego odcinka leży, jak widzieliśmy, na prostych b i b' , zatem odcinkiem, otrzymanym z przesunięcia odcinków LM i $L'M'$, jest przekątna CE równoległoboku.

Rozwiązanie jest teraz oczywiste: przez punkt K prowadzimy równoległą do jednej lub do drugiej przekątnej równoległoboku $CDEF$.

Ćwiczenia XXIII. 1. Zbudować trapez $ABCD$, mając dane podstawy b, d i przekątną e, f . [Wskazówka: przesunąć przekątną].

2. Zbudować czworobok, mając dane a, b, c, d i kąt $\angle(b, d)$ między przedłużeniami dwóch boków przeciwnych. [Wskazówka: przesunąć bok c lub a].

3. Zbudować równoległobok, mając dane a, b, ω . [Wskazówka: przesuwamy jedną z przekątnych].

4. Zbudować trapez, mając dane a, ω i przekątną e, f .

5. Zbudować czworobok $ABCD$, mając dane A, B, C, a, c .

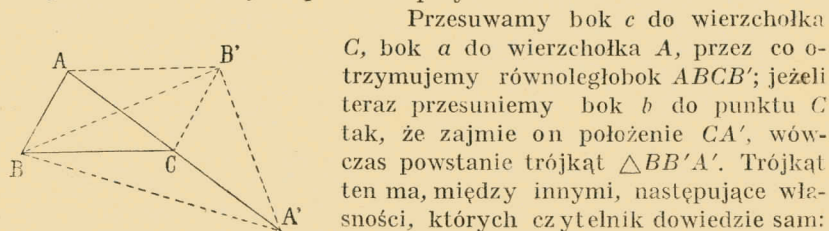
6. Zbudować $\triangle ABC$, mając dane s_a, s_b, h_c . [Wskazówka: przesuwamy h_c].

7. Zbudować równoległobok, mając dane a, h_a, h_b .

8. Dane są dwa koła $(O)r, (O')r'$ i punkt P , leżący zewnątrz obu kół. Przez P poprowadzić sieczną tak, by koła wyznaczyły na niej dwie równe cięciwy. [Wskazówka do analizy: przesuwamy koło $(O')r'$ równoległe do szukanej prostej tak, by równe cięciwy przystały do siebie; jeżeli O_1 jest nowym położeniem środka O' , wówczas $\triangle OO_1O'$ daje się zbudować].

9. Zbudować czworobok, mając dane a, b, c, d oraz odcinek m , łączący środki dwóch przeciwległych boków a, c . [Wskazówka do analizy: przesuwamy boki b, d do środka boku c ; końce tych dwu przesuniętych odcinków leżą na jednej prostej ze środkiem boku a].

Jeżeli chodzi o zbudowanie trójkąta $\triangle ABC$, wówczas następujące przekształcenie bywa pomocne przy analizie zadania:



Rys. 128.

Przesuwamy bok c do wierzchołka C , bok a do wierzchołka A , przez co otrzymujemy równoległobok $ABCB'$; jeżeli teraz przesuniemy bok b do punktu C tak, że zajmie on położenie CA' , wówczas powstanie trójkąt $\triangle BB'A'$. Trójkąt ten ma, między innymi, następujące własności, których czytelnik dowiedzie sam: 1) boki nowego trójkąta są dwa razy większe od środkowych trójkąta $\triangle ABC$; 2) punkt C jest środkiem ciężkości trójkąta $\triangle BB'A'$; 3) kąty przy punkcie C równają się kątom trójkąta $\triangle ABC$ albo też spełniają się z nimi; 4) kąty między bokami a środkowymi równają się sobie w obu trójkątach, i t. d.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

- | | | |
|-----------------------|---|---|
| 10. s_a, s_b, h_a . | 11. $s_a, s_b, \sphericalangle(a, s_c)$. | 12. A, s_a, h_a . |
| 13. A, h_a, s_b . | 14. $a, \sphericalangle(a, s_c), \sphericalangle(b, s_c)$. | 15. $a, h_a, \sphericalangle(a, s_c)$. |

16. Dane koło, w nim średnica AB i dwa punkty C, D na jednym półokręgu; znaleźć na drugim półokręgu taki punkt E , by proste CE, DE wyznaczyły na średnicy AB odcinek danej długości $FG = m$. [Wskazówka: przesuwamy FG do punktu C].

2. Obrót.

§ 166. Określenie. Mając daną jakąkolwiek figurę F , połączmy wszystkie jej punkty $A_1, A_2, A_3, \dots$ ze stałym punktem O , a następnie poprowadźmy z punktu O odcinki

$$OB_1 = OA_1, OB_2 = OA_2, OB_3 = OA_3, \dots,$$

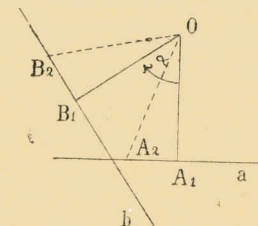
przyczym niech wszystkie odcinki drugiej grupy będą jednakowo nachylone do odpowiednich odcinków pierwszej grupy, t. j. niech będzie

$$\sphericalangle A_1OB_1 = \sphericalangle A_2OB_2 = \sphericalangle A_3OB_3 = \dots = \sphericalangle \alpha.$$

Końce $B_1, B_2, B_3, \dots$ drugiej grupy odcinków tworzą nową figurę F' ; powiadamy, że powstała ona przez obrót figury F dookoła środka obrotu O .

§ 167. Twierdzenie. Wskutek obrotu linii prostej powstaje prosta.

Niech będzie dana prosta a . Ze środka obrotu O poprowadzimy do niej prostą OA_1 i obracamy tę prostą o kąt $\sphericalangle \alpha$ czyli budujemy $\sphericalangle A_1OB_1 = \sphericalangle \alpha$ i odkładamy na jego ramieniu odcinek $OB_1 = OA_1$. Jeżeli teraz przez punkt B_1 poprowadzimy prostą b , prostą do OB_1 , wówczas łatwo będzie przekonać się, że jest ona wynikiem obrotu prostej a o kąt $\sphericalangle \alpha$ dookoła środka obrotu O .



Rys. 129.

W tym celu musimy dowieść dwóch prawd: 1) że każdy punkt na prostej b powstał skutkiem obrotu odpowiedniego punktu prostej a o kąt $\sphericalangle \alpha$; 2) że obracając o kąt $\sphericalangle \alpha$ dowolny punkt prostej a , otrzymamy punkt na prostej b .

1) Odlóżmy na a odcinek dowolny A_1A_2 , na b zaś równy mu odcinek B_1B_2 . Trójkąty $\triangle OA_1A_2, \triangle OB_1B_2$ równają się sobie (dlaczego?), zatem

$$OA_2 = OB_2$$

oraz

$$\sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle B_1OB_2$$

i co zatem idzie, $\sphericalangle A_2OB_2 = \sphericalangle A_1OB_1 = \sphericalangle \alpha$.

2) Jeżeli z punktu O poprowadzimy dowolny odcinek OA_2 i wykreślimy $\sphericalangle B_2OA_2 = \sphericalangle \alpha$, wówczas musi być również

$$\sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle B_1OB_2,$$

że zaś mamy

$$OA_1 = OB_1,$$

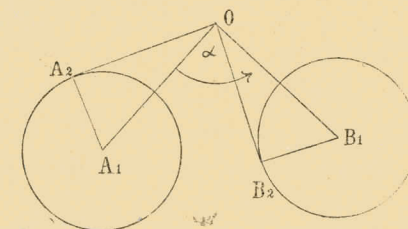
zatem musi być

$$OA_2 = OB_2,$$

czyli punkt B_2 , leżący na prostej b , jest wynikiem obrotu punktu A_2 o kąt $\sphericalangle \alpha$ dookoła środka O .

Wniosek. Wskutek obrotu odcinka powstaje równy mu odcinek.

§ 168. Twierdzenie. Wskutek obrotu koła powstaje równe mu koło.

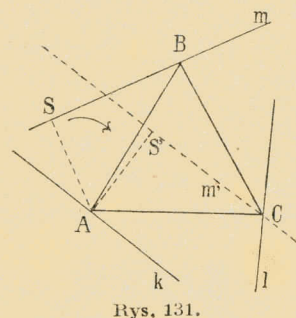


Rys. 130.

Uczeń dowiedzie twierdzenia sam, kierując się załączonym rysunkiem.

Twierdzenie. Wskutek obrotu kąta powstaje równy mu kąt.

§ 169. Zadanie I. Dane są trzy proste k, l, m i punkt A na jednej z nich; wykreślić trójkąt równoboczny $\triangle ABC$ tak, by wierzchołki jego leżały na tych prostych.



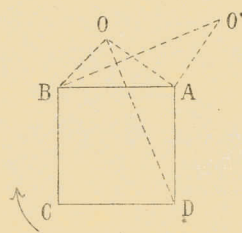
Rys. 131.

Rzecz prosta, że wystarczy znaleźć drugi jeszcze wierzchołek trójkąta, np. C , ponieważ zaś wiemy, iż C leży na prostej l , zatem wystarczy znaleźć jakiekolwiek inne miejsce geometryczne tego wierzchołka. W tym celu zauważmy, że jeśli bok AB wraz z prostą m obrócimy dookoła A o kąt $\angle A = \frac{2}{3}\delta$, wówczas bok ten upadnie na bok AC , punkt B upadnie na punkt C , z prostej zaś

m otrzymamy prostą m' , przechodzącą przez szukany punkt C .

Tak więc, chcąc wykreślić żądany trójkąt $\triangle ABC$, kreślimy najpierw $AS \perp m$, i obracamy tę prostą dookoła A o kąt, równający się $\frac{2}{3}\delta$. W ten sposób otrzymujemy odcinek AS' . Kreślimy teraz $m' \perp AS'$; punkt przecięcia się prostej m' z prostą l jest drugim wierzchołkiem trójkąta. Aby otrzymać trzeci wierzchołek B , wystarczy wykreślić koło $(A)C$.

§ 170. Zadanie II. Zbudować kwadrat $ABCD$, mając dane w płaszczyźnie rysunku punkty O i A oraz znając odległości punktu O od wierzchołków B i D kwadratu (np. $OB = n, OD = r$).



Rys. 132.

Rzecz jasna, że kwadrat zbudujemy odrazu, jeżeli potrafimy znaleźć drugi jego wierzchołek, oprócz punktu A , np. jeżeli znajdziemy wierzchołek B . Ponieważ znamy odległość $OB = n$, zatem punkt B leży na okręgu $(O)n$. Zadanie sprowadza się tedy do znalezienia jeszcze drugiego miejsca geometrycznego punktu B .

W tym celu zauważmy, że jeśli trójkąt $\triangle OAD$ obrócimy o kąt prosty dookoła punktu A , otrzymamy trójkąt $\triangle O'AB$, tak iż

$$O'A = OA, O'B = OD = r.$$

Punkt O' możemy z łatwością wyznaczyć: wystarczy w punkcie A wystawić prostą do OA i odłożyć na niej $O'A = OA$. Mając punkt O' , kreślimy okrąg $(O')r$, który jest drugim miejscem geometrycznym punktu B ; punkt ten zostaje wyznaczony przez przecięcie się okręgów $(O)n$ i $(O')r$.

Rozwiązań otrzymamy tyle, ile te dwa okręgi mają punktów wspólnych. Tak więc przy założeniu że $r > n$, zadanie ma rozwiązania

dwa, jeżeli $r - n < OO' < r + n$;

jedno, „ „ $OO' = r \pm n$;

nie ma rozwiązań, jeżeli $OO' < r - n$

lub $OO' > r + n$.

Zauważmy, że jeśli na danym odcinku OA zbudujemy kwadrat, wówczas OO' musi być przekątną tego kwadratu, tak iż, mając dane odcinki n, r i punkty O, A możemy zgóry przewidzieć, czy zadanie da się rozwiązać, i ile posiada rozwiązań.

Ćwiczenia XXIV. 1. W dany kwadrat wpisać trójkąt równoboczny $\triangle A'B'C'$ tak, by jeden jego wierzchołek leżał w danym punkcie A' na boku kwadratu.

2. W dany równoległobok wpisać kwadrat. [Wskazówka do analizy: gdzie leży środek kwadratu? ile wierzchołków trzeba znać, by móc wykreślić kwadrat?].

3. W dany trójkąt $\triangle LMN$ wpisać trójkąt równoramienny $\triangle ABC$, jeżeli mamy dane: wierzchołek C na boku LM oraz kąt $\angle C$.

4. Dane są dwie proste m, n i punkt O , nie leżący na nich. Z punktu O zakreślić koło tak, aby suma cięciw, wyznaczonych na tych dwóch prostych, równała się danemu odcinkowi a . [Wskazówka do analizy: obrócić prostą m dookoła O tak, by uczynić ją równoległą do n].

5. Dane są dwa koła $(O)r$ i $(O')r'$ oraz punkt A ; przez A poprowadzić odcinek tak, by końce jego leżały na danych okręgach, punkt zaś A żeby był jego środkiem. [Wskazówka: obracamy jedno koło o kąt półpełny].

6. Przez punkt przecięcia się dwóch danych kół poprowadzić sieczną tak, by różnica cięciw, wyznaczonych na niej, równała się danemu odcinkowi a .

7. W dany odcinek kołowy wpisać trójkąt równoramienny $\triangle ABC$, mając dany punkt C na łuku oraz kąt $\angle C$.

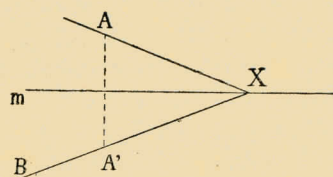
8. Wykreślić trójkąt równoboczny tak, by wierzchołki jego leżały na trzech danych okręgach współśrodkowych, przyczem położenie jednego wierzchołka jest dane.

9. Dane są dwie równoległe a, b oraz punkt C , nie leżący na nich. Znaleźć na równoległych takie dwa punkty X, Y , żeby było $CX = CY$ i żeby kąt $\sphericalangle XCY$ był prosty. [Wskazówka: kąt $\sphericalangle XCY$ obracamy dookoła wierzchołka C].

3. Przekształcenie symetryczne.

§ 171. Poznaliśmy już poprzednio (Ćwiczenia XII, str. 74), szereg zadań konstrukcyjnych, dających się rozwiązać zapomocą przekształcenia symetrycznego, ze względu jednak na doniosłość tej metody podajemy jeszcze kilka przykładów jej zastosowania.

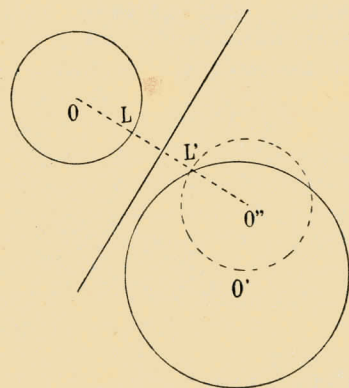
Zadanie I. Dane są dwa punkty A, B , leżące po dwóch stronach prostej m , znaleźć na prostej m taki punkt X , by prosta ta była dwusieczną kąta $\sphericalangle AXB$.



Rys. 136.

Ponieważ dwusieczna m jest osią symetrii kąta, wystarczy przekształcić jeden z danych punktów, np. A symetrycznie względem tej osi; otrzymany w ten sposób punkt A' , wyznacza prostą BA' , która przecina prostą m w żądanym punkcie X .

Dowód pozostawiamy czytelnikowi.



Rys. 134.

Zadanie II. Dane są dwa koła $(O)r, (O')r'$ i prosta m , leżąca między nimi; wykreślić odcinek prostopadły do m , jeżeli wiadomo, iż końce jego muszą leżeć na okręgach kół danych, środek zaś ma znajdować się na prostej m .

Założmy, iż LL' jest żądanym odcinkiem (rys. 134). Prosta m jest, oczywiście, osią symetrii tego odcinka, jeśli więc koło $(O)r$ przekształcimy symetrycznie względem tej osi,

wówczas otrzymamy koło $(O'')r$, które powinno przechodzić przez punkt L' . Punkt więc L' jest wyznaczony, jako punkt wspólny okręgów $(O')r'$ i $(O'')r$.

Liczba rozwiązań jest taka sama, jak liczba punktów wspólnych tych dwu okręgów.

Ćwiczenia XXV. 1. Dane są trzy proste m, n, p , przecinające się w punkcie W , oraz punkt K , nie leżący na żadnej z tych prostych. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$ tak, żeby trzy dane proste były dwusiecznymi jego kątów wewnętrznych, punkt zaś K żeby leżał na boku a .

2. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane na płaszczyźnie dwa jego wierzchołki A, B , punkt P , leżący na dwusiecznej zewnętrznej kąta $\sphericalangle C$, oraz sumę dwóch boków $a + b$.

3. Dana jest prosta CD i dwa punkty A, B , leżące po jednej stronie tej prostej; znaleźć na CD taki punkt X , żeby różnica kątów $\sphericalangle CXA$ i $\sphericalangle DXB$ równała się danemu kątowi $\sphericalangle \alpha$. [Wskazówka do analizy: jeżeli A' jest punktem symetrycznym z A względem prostej danej, wówczas należy zbadać kąty trójkąta $\triangle A'XB$].

4. Zbudować kwadrat $ABCD$ tak, by wierzchołek A leżał na danej prostej m , wierzchołek C na danej prostej p , wierzchołki B, D , na trzeciej danej prostej q .

5. Na danej prostej m znaleźć taki punkt X , żeby styczne, poprowadzone z tego punktu do dwu danych kół $(O)r, (O')r'$, leżących po jednej stronie prostej m , były jednakowo nachylone do prostej m .

6. Dana jest prosta AB i punkty C, D , nie leżące na niej; znaleźć na prostej AB taki punkt X , żeby jeden z kątów $\sphericalangle CXA, \sphericalangle DXB$ był dwa razy większy od drugiego. [Wskazówka do analizy: jeżeli kąt $\sphericalangle CXA$ jest większy, wówczas przedłużamy CX , budujemy D' , symetryczny z punktem D względem osi AB , wreszcie badamy, jak leży prosta XD' względem prostych AB, CX].

7. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane: $c, r_a, B - A$.

8. Na obwodzie danego czworoboku $ABCD$ znaleźć taki punkt X , żeby dwa przeciwległe boki b, d widziane były z tego punktu pod równymi kątami. Ile można znaleźć takich punktów? [Wskazówka: punkt A przekształcamy symetrycznie względem prostej CD].

9. Przez dwa dane punkty A, B poprowadzić koło, styczne do danej prostej m . [Wskazówka do analizy: jeżeli S jest punktem styczności, przekształcamy B symetrycznie względem prostej m , otrzymujemy punkt B' i porównujemy kąt $\sphericalangle ASB'$ z kątem między prostą m a prostą AB].

10. Przez dany punkt A poprowadzić koło, styczne do dwóch danych prostych m, p . [Wskazówka: sprowadzić do zadania poprzedniego].

11. Dane są dwie równoległe a, b , poprzeczna k i punkt M , nie leżący na żadnej z tych trzech prostych. Znaleźć na równoległych ta-

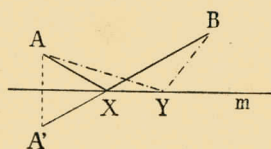
kie dwa punkty X, Y , żeby prosta XY była równoległa do k i żeby było $XM = YM$.

12. Zbudować czworobok $ABCD$, mając dane a, d, B, D , oraz warunek, że czworobok ma być opisany na kole.

[Wskazówka: jeżeli punkty C', D' są symetryczne z C, D względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle A$, wówczas $C'D'$ jest styczną do koła].

§ 172. Przekształcenie symetryczne bywa szczególnie pomocne przy rozwiązywaniu zadań, w których chodzi o znalezienie najmniejszych lub największych odcinków, czyniących zadość pewnym warunkom.*) Na przykładach najlepiej zrozumiemy, o co w takich zadaniach chodzi.

Zadanie III. Dana jest prosta m i po jednej jej stronie dwa punkty A, B . Znaleźć na prostej m taki punkt X , żeby łamana AXB była możliwie najmniejsza.



Rys. 135.

Jeżeli założymy, że punkt X na rys. 135 czyni zadość warunkom zadania, wówczas łamana AXB powinna być mniejsza od każdej innej łamanej AYB , której wierzchołek Y leży na prostej m .

Gdyby punkty A, B leżały po różnych stronach prostej m , znalezienie najkrótszej drogi od jednego punktu do drugiego nie przedstawiałoby trudności: byłby nią odcinek, łączący te punkty. To nasuwa nam pomysł przekształcenia symetrycznego. Przekształcamy tedy punkt A w punkt A' i łączymy A' z B ; punkt X leży na przecięciu się prostych $A'B$ i m .

Istotnie, jeżeli jakiegokolwiek inny punkt Y prostej m połączymy z A, A', B , wówczas musi być

$$AY = A'Y,$$

$$\text{zatem } AY + YB = A'Y + YB.$$

$$\text{Tak samo mamy } AX + XB = A'X + XB.$$

Ale punkty A', X, B leżą na jednej prostej,

$$\text{zatem } A'X + XB = A'B,$$

punkty A', Y, B są wierzchołkami trójkąta i mamy

$$A'B < A'Y + YB$$

$$\text{czyli } AX + XB < AY + YB.$$

*) Mówiąc ogólniej: najmniejszych i największych wartości wśród wielkości geometrycznych pewnego jakiegoś rodzaju, spełniających pewne zgóry zadane warunki.

Zadanie IV. W dany kąt $\sphericalangle AOB$ wpisać trójkąt $\triangle A'B'C'$ tak, żeby jego obwód był możliwie najmniejszy i żeby wierzchołek C' leżał w danym punkcie wewnątrz kąta $\sphericalangle AOB$, wierzchołki zaś A', B' żeby leżały na ramionach tego kąta.

Jeżeli C, C'' są obrazami symetrycznymi punktu C' względem ramion kąta danego, wówczas prosta $C''C'''$ przecina ramiona kąta w żądanych punktach A', B' .

Istotnie,

$$A'C' = A'C'', B'C' = B'C''',$$

zatem obwód trójkąta $\triangle A'B'C'$ równa się odcinkowi $C''C'''$. Jeżeli wpiszemy w ten kąt inny jakiegokolwiek trójkąt $\triangle C'KL$, wówczas musi być

$$KC' = KC'', LC' = LC''',$$

zatem obwód tego nowego trójkąta równa się łamanej $C''KLC'''$ i wskutek tego jest większy od odcinka $C''C'''$.

Zadanie możliwe jest tylko wówczas, gdy prosta $C''C'''$ przecina ramiona kąta, nie zaś ich przedłużenia, t. j. gdy prosta $C''C'''$ leży między punktami O i C' . Aby tak było, trzeba i wystarcza, żeby kąt $\sphericalangle C''OC'''$ był mniejszy od 2δ .

$$\text{Otóż } \sphericalangle C''OA' = \sphericalangle A'OC', \sphericalangle C'''OB' = \sphericalangle B'OC',$$

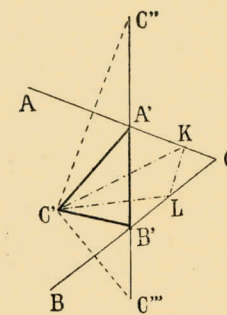
$$\text{zatem } \sphericalangle C''OC''' = 2 \sphericalangle AOB.$$

Wobec tego warunkiem koniecznym i dostatecznym możliwości zadania jest nierówność

$$\sphericalangle AOB < \delta.$$

Ćwiczenia XX VI. 1. Dany kąt $\sphericalangle AOB$ przeciąć prostą EF tak, żeby w trójkącie $\triangle EOF$ suma boków $EO + OF$ równała się danemu odcinkowi m , i żeby bok EF był możliwie najmniejszy. [Wskazówka: przecinamy ramiona kąta prostą KL tak, żeby trójkąt $\triangle KOL$ był równoramienny i żeby było $KO = OL = \frac{m}{2}$, poczym budujemy obraz punktu E względem prostej KL .]

2. W dany kwadrat wpisać kwadrat o możliwie najmniejszym obwodzie. [Wskazówka: wykazać, że jeżeli $ABCD$ jest danym kwadratem, $A'B'C'D'$ szukany, wówczas $AA' + AD'$ jest wielkością stałą, w jakiegokolwiek sposób został wpisany kwadrat. Po tym spostrzeżeniu sprowadzić zadanie do poprzedniego].



Rys. 136.

3. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$; przez wierzchołek A prowadzimy prostą m , równoległą do BC ; znaleźć na tej prostej taki punkt A' , żeby suma $A'B + A'C$ była jaknajmniejsza. [Wskazówka: przekształcamy B symetrycznie względem prostej m i łączymy B' z A].

4. Wewnątrz kąta $\sphericalangle AOB$ dane są punkty P i Q , znaleźć na ramionach kąta takie dwa punkty A' , B' , żeby linia łamana $PA'B'Q$ była możliwie najkrótsza.

5. W dany czworobok $ABCD$ wpisać drugi czworobok o możliwie najmniejszym obwodzie tak, żeby jeden jego wierzchołek leżał w danym punkcie P na boku AB .

6. Dany jest kąt $\sphericalangle AOB$ i wewnątrz niego punkt C ; na ramieniu OA znaleźć punkt M , który byłby jednakowo odległy od drugiego ramienia i od punktu C . [Wskazówka do analizy: przekształcamy ramię OB wraz z prostopadłym do niego odcinkiem MN symetrycznie względem ramienia OA]. *)

*) Uczniom, pragnącym zapoznać się gruntowniej z metodami rozwiązywania zadań konstrukcyjnych i przerobić większą ich ilość, polecamy klasyczne dziełko:

J. Petersen. *Metody i teorie rozwiązywania zadań geometrycznych konstrukcyjnych*. Przetłum. K. Hertz, Warszawa, 1881.

Liczne zagadnienia teoretyczne, związane z teorią konstrukcji geometrycznych, zostały gruntownie opracowane w książce:

F. Enriques. *Zagadnienia dotyczące geometrii elementarnej*. Tom II. Warszawa, 1917.

Niektóre rozdziały tej książki dostępne są dla osób, nie znających matematyki wyższej.

KSIEGA II.

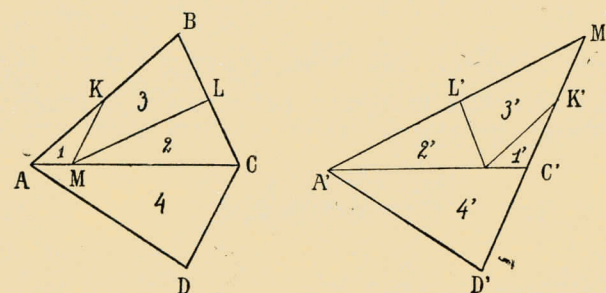
O równoważności wielokątów.

ROZDZIAŁ I.

Podstawowe twierdzenia i zadania o wielokątach równoważnych.

§ 173. Określenie. Dwa wielokąty nazywamy równoważnymi, jeżeli możemy je podzielić na jednakową ilość wielokątów odpowiednio równych sobie.

Wprowadzając to nowe pojęcie, musimy pokazać, że nie zawiera ono sprzeczności, czyli że naprawdę istnieją wielokąty, które, mając różne kształty (a więc nie będąc równymi),



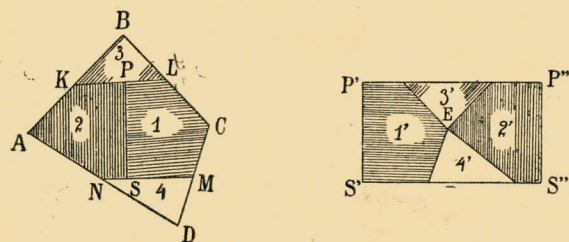
Rys. 137.

dają się jednak podzielić na jednakową ilość części odpowiednio równych. W tym celu wystarczy przytoczyć następujące przykłady.

1-o. Niech będzie dany czworobok $ABCD$ (rys. 137), w którym K, L są środkami boków AB, BC . Przez jeden z tych punktów, np. przez punkt K prowadzimy równoległą do przeciwnego boku (a więc do CD), która przecina w punkcie M przekątną AC . Jeżeli teraz połączymy M z L , to podzielimy czworobok na cztery części, z których można ułożyć trójkąt $\triangle AD'M$ w sposób, wskazany na rysunku. Tak więc czworobok $ABCD$ jest równoważny trójkątowi $\triangle A'D'M'$

Uczeń wykona figurę z tektury; zbada ruch, który muszą wykonać poszczególne części czworoboku, gdy układamy z nich trójkąt; wreszcie wykaże, że przy układaniu tych części według załączonego rysunku kontury poszczególnych części dokładnie do siebie przystają, wypełniając cały obszar trójkąta. To samo dotyczy następnego przykładu.

2-o. Niech K, L, M, N będą środkami boków czworoboku $ABCD$ (rys. 138). Łączymy K z L, M z N i w dowolnym punkcie P prowadzimy wspólną prostą PS do obu tych odcin-

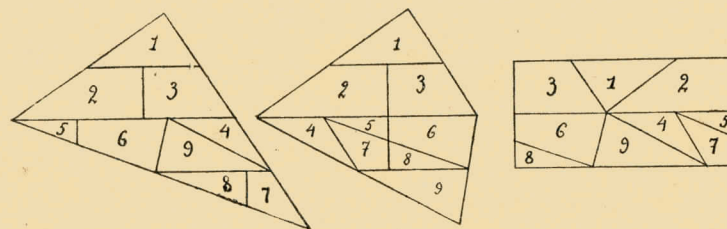


Rys. 138.

ków. W ten sposób czworobok dany został podzielony na cztery części, z których ułożyć można prostokąt $P'P''S'S'$, za tym czworobok $ABCD$ jest równoważny prostokątowi $P'P''S'S'$.

§ 174. *Siecią* będziemy nazywali układ odcinków, dzielących dany wielokąt na części, z których ułożyć można drugi wielokąt, równoważny pierwszemu. Np. na rys. 138 odcinki PS, KL, NM tworzą w czworoboku sieć prostokątową, cztery zaś odcinki, schodzące się wewnątrz prostokąta w punkcie E (tenże rysunek), tworzą w prostokącie sieć czworobokową. Tak samo na rys. 137 czworobok został pokryty siecią trójkątową, złożoną z odcinków AC, MK, ML .

§ 175. Dany czworobok możemy przekształcić bądź w równoważny trójkąt, bądź w prostokąt czyli możemy utworzyć dwie figury (trójkąt i prostokąt), równoważne tej samej trzeciej figurze (czworobokowi). Powstaje pytanie: czy te dwie figury możemy uważać za równoważne sobie?



Rys. 139.

Odpowiedź, rzecz prosta, wypadnie twierdząca. Istotnie, jeżeli czworobok pokryjemy od razu dwiema sieciami: trójkątową i prostokątową, wówczas podzielimy czworobok na pewną ilość części (na rys. 139 na dziewięć części), z których możemy ułożyć zarówno trójkąt, jak i prostokąt. Wobec tego trójkąt i prostokąt składają się każdy z tych samych wielokątów, w naszym przykładzie z tych samych dziewięciu wielokątów, są więc równoważne sobie.

Mamy tedy następujące

Twierdzenie. Dwa wielokąty równoważne trzeciemu są sobie równoważne.

Oczywista rzecz, że prostokąt nasz możemy bezpośrednio przekształcić w trójkąt (lub odwrotnie); w tym celu wystarczy np. pokryć prostokąt dwiema sieciami: czworobokową i trójkątową.

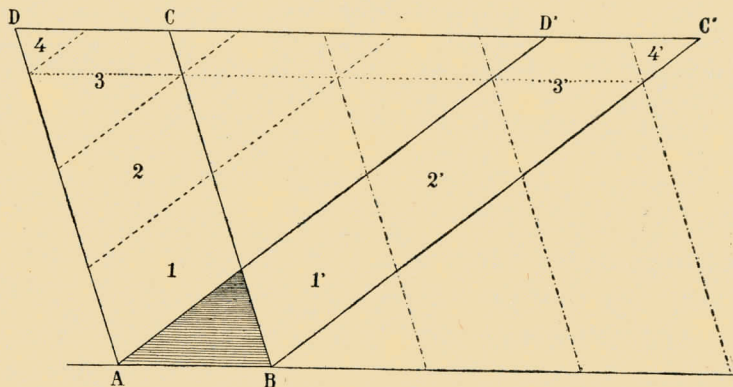
§ 176. Określenie. Jeżeli dwa wielokąty leżą w tej samej płaszczyźnie tak, że mają część konturu wspólną, lecz żadnych więcej punktów wspólnych nie mają, wówczas wszystkie punkty obu wielokątów tworzy nowy wielokąt, który nazywamy *sumą* tamtych dwu. Oczywiście możemy rozszerzyć pojęcie sumy na większą liczbę wielokątów.

Np. na rys. 138 czworobok $ABCD$ uważamy za sumę trójkątów 3 i 4 oraz pięciokątów 1 i 2.

Z określenia równoważności wielokątów i z określenia ich sumy wynika bezpośrednio

Twierdzenie. Sumy równoważnych wielokątów są sobie równoważne.

§ 177. **Twierdzenie.** Równoległoki o równych podstawach i wysokościach są sobie równoważne.*)



Rys. 140.

Jeżeli dwa równoległoki mają wspólną podstawę AB i równe wysokości i jeżeli oba leżą po jednej stronie tej podstawy, wówczas boki CD , $C'D'$ przeciwległe podstawie znajdują się na jednej prostej, równoległej do AB (rys. 140). Wyobraźmy sobie, że pas płaszczyzny, zawarty między prostymi równoległymi AB , CD pokryliśmy dwiema sieciami, przyczem jedna z nich (linje przerywane) składa się z odcinków równoległych do AD i odległych od siebie tak, jak AD od BC , druga zaś sieć (linje kropkowane) składa się z odcinków równoległych do AD' i odległych od siebie tak, jak AD' od BC' .

Równoległoki dane składają się teraz z trójkąta zakreskowanego $\triangle ABE$ oraz z szeregu równoległoboków (na rys. 1, 2, 1', 2'), które wszystkie są sobie równe, gdyż mają boki i kąty odpowiednio równe. Równoległoboków cząstkowych powstało w $ABCD$ tyle, ile razy wysokość trójkąta zakreskowanego

*) Przypominamy (porówn. uwagę na str. 69), że każdy bok równoległoboku możemy nazwać podstawą, a wówczas *wysokością* nazywamy odległość tego boku od boku przeciwnego.

$\triangle AEB$ mieści się w wysokości równoległoboku $ABCD$. Oczywiście mamy tyleż równoległoboków cząstkowych w równoległoboku $ABC'D'$. Prócz tego tworzą się (w przypadku ogólnym) pięciokąty (na rys. 3 i 3') i trójkąty (4 i 4'), które są sobie równe, gdyż mają boki i kąty odpowiednio równe.*)

Tak więc równoległoki $ABCD$, $ABC'D'$ zostały podzielone na jednakową liczbę części parami równych sobie, a więc są równoważne.

W szczególności *każdy równoległobok jest równoważny prostokątowi o tej samej podstawie i wysokości.*

§ 178. Chcąc powyższe twierdzenie odwrócić, musimy wprowadzić nowy pewnik.

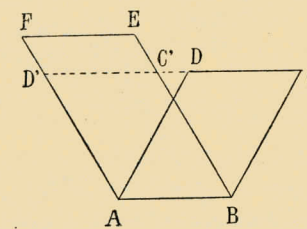
Pewnik V. Żaden wielokąt nie jest równoważny swej części.

Innymi słowy: jeżeli dany wielokąt W podzielimy w jakikolwiek sposób na części i jedną z nich usuniemy, wówczas z pozostałych części nie uda nam się nigdy ułożyć wielokąta równoważnego wielokątowi W .

§ 179. **Twierdzenie przeciwne** (względem § 177). Dwa równoległoki, mające równe podstawy, lecz nierówne wysokości, nie są równoważne sobie.

Niech będą dane dwa równoległoki $ABCD$, $ABEF$ o wspólnej podstawie AB lecz nierównych wysokościach, i niech mianowicie wysokość drugiego równoległoboku będzie większa.

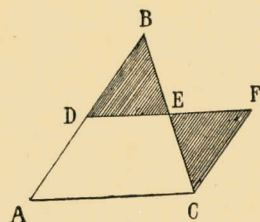
W takim razie prosta DC musi przecinać boki AF , BE odpowiednio w punktach D' , C' , przyczem (na zasadzie poprzedniego twierdzenia) równoległobok $ABCD$ jest równoważny równoległokowi $ABC'D'$, który stanowi część równoległoboku $ABEF$. Na mocy pewnika V równoległobok $ABEF$ nie jest równoważny $ABC'D'$, a więc nie może być równoważny równoległokowi $ABCD$ (gdzie przeczyłoby to twierdzeniu § 175).



Rys. 141.

*) Uczeń dowiedzie szczegółowo równości tych figur.

§ 176. Twierdzenie. Trójkąt jest równoważny równoległobokowi, mającemu tę samą podstawę, lecz dwa razy mniejszą wysokość.



Rys. 142.

Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ połączymy środki D, E boków AB, BC , a przez C poprowadzimy równoległą do AB , otrzymamy równoległobok $ADFC$, którego wysokość jest dwa razy mniejsza od wysokości trójkąta $\triangle ABC$.

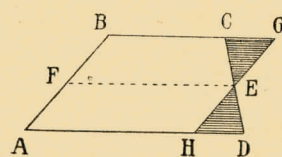
Równoległobok ten jest równoważny trójkątowi danemu,

ponieważ

$$\triangle EBD = \triangle ECF.$$

Istotnie $EB = EC$, $BD = CF$, $\sphericalangle EBD = \sphericalangle ECF$.

§ 177. Twierdzenie. Trapez jest równoważny równoległobokowi, mającemu tę samą wysokość, podstawę zaś równą średniej arytmetycznej podstaw trapezu (albo inaczej: podstawę równą linii środkowej trapezu).



Rys. 143.

W trapezie $ABCD$ przez środek E boku CD prowadzimy równoległą do boku AB i przedłużamy podstawę BC . Otrzymujemy równoległobok $ABGH$, którego wysokość równa się wysokości trapezu, podstawa zaś AH jest o tyle mniejsza od AD , o ile

jest większa od BC , zatem jest ich średnią arytmetyczną.

Równoległobok bok ten jest równoważny naszemu trapezowi, gdyż $\triangle CEG = \triangle EHD$ (dlaczego?).

Ćwiczenia XXVII. 1. Dowolny trójkąt $\triangle ABC$ podzielić na trzy części tak, by można z nich było utworzyć prostokąt.

1a. Rozwiązać to samo zadanie, dzieląc trójkąt na cztery części.

1b. Dany prostokąt przekształcić w równoważny trójkąt $\triangle ABC$ tak, żeby wysokość h_a trójkąta równała się wysokości prostokąta, i żeby bok b trójkąta równał się danemu odcinkowi.

2. Podzielić trapez na dwie części, z których można było utworzyć równoważny trójkąt.

2a. Zadanie odwrotne: dany trójkąt przekształcić w równoważny trapez.

2b. Podzielić trapez na trzy części, z których można było ułożyć trójkąt.

3. W trójkącie $\triangle ABC$ przez środki D, E boków AB, AC prowadzimy dwie dowolne równoległe, które przecinają trzeci bok w punktach F, G . Dowieść za pomocą podziału na części równe: 1-o, że równoległobok $DEFG$ jest równoważny połowie trójkąta $\triangle ABC$; 2-o, że trójkąt $\triangle ADE$ jest równoważny połowie równoległoboku $DEFG$.

4. W kwadracie $ABCD$ środek M boku AB łączymy z dowolnym punktem N na boku AD , poczym kreślimy odcinek $M'N'$, symetryczny z MN względem przekątnej BD . Jeśli teraz na NM oberzemy dowolny punkt S , połączymy go z M' i N' , a na przedłużeniu tych dwu prostych odłożymy $M'P = M'S$ oraz $N'R = N'S$, wówczas otrzymamy trójkąt $\triangle SPR$ równoważny kwadratowi $ABCD$.

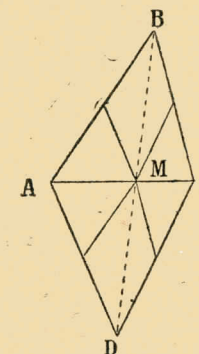
5. Dany równoległobok $ABCD$ rozciąć na dwie części tak, by przekształcić go w równoważny równoległobok, mający tę samą podstawę AB i kąt przy wierzchołku B dany (mniejszy od kąta $\sphericalangle CBA$).

6. W równoległoboku $ABCD$, prowadzimy z wierzchołków A, B dwie dowolne proste, przecinające się wewnątrz równoległoboku. Dowieść, że dzielą go one na trzy części, z których daje się ułożyć nowy równoległobok, równoważny danemu i nie mający z nim ani jednego wspólnego boku.

7. Za pomocą konstrukcji poprzedniego zadania możemy otrzymać dowolną ilość równoległoboków równoważnych danemu. Jakie warunki dodatkowe (prócz równoważności) możemy obrać tak, by nowy równoległobok był w zupełności wyznaczony?

8. Dwa trójkąty są równoważne, jeżeli mają po dwa boki odpowiednio równe, kąty zaś zawarte między tymi bokami spełniają się. Dowieść tego w dwojaki sposób: 1-o umieszczając oba trójkąty na wspólnej podstawie; 2-o, umieszczając je tak, by podstawa jednego była przedłużeniem podstawy drugiego.

9. Jeżeli dwa trójkąty o wspólnej podstawie i równych wysokościach położone są tak, jak na rys. 144, wówczas można je podzielić na części równe, prowadząc w każdym trójkącie z punktu M równoległe do boków drugiego trójkąta.



Rys. 144.

10. Jeżeli, poczynając od dwóch przeciwległych wierzchołków A, C równoległoboku, odłożymy na czterech jego bokach odcinki m, n tak, by równe odcinki leżały na przeciwległych bokach, wówczas końce ich wyznaczą nowy równoległobok. Jeżeli te same odcinki w taki sam sposób odłożymy od wierzchołków B, D , otrzymamy trzeci równoległobok, równoważny drugiemu.

11. Jeżeli na bokach dowolnego trójkąta $\triangle ABC$ zbudujemy na zewnątrz kwadraty i połączymy sąsiednie wierzchołki dwu kolejnych kwadratów, otrzymamy trójkąt, równoważny trójkątowi $\triangle ABC$.

12. Na bokach dowolnego czworoboku wypukłego budujemy na zewnątrz po kwadracie i łączymy sąsiednie wierzchołki kolejnych kwa-

dratów. Otrzymujemy w ten sposób cztery trójkąty; zbadać, jaka zachodzi między nimi zależność.

Czy znalezione twierdzenie moż na uważać za uogólnienie twierdzenia poprzedniego, t. j. czy poprzednie twierdzenie z niego wynika?

13. Jeżeli połączymy środki dwu podstaw trapezu, otrzymamy dwa równoważne czworoboki.

14. Równoległobok, zbudowany z dwóch boków trójkąta i z kąta między nimi zawartego, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z trzeciego boku i z wysokości, poprowadzonej do tego trzeciego boku.

15. Równoległoboki, zbudowane z dwu którychkolwiek boków trójkąta danego i z kąta między nimi zawartego, są sobie równoważne.

Jakie stąd wynika twierdzenie, dotyczące prostokątów, o których mowa w poprzednim zadaniu?

16. Jeżeli w równoległobok $ABCD$ wpiszemy trójkąt $\triangle AMN$ tak, by miał on z równoległobokiem wspólny wierzchołek A , wierzchołki zaś M, N żeby leżały na bokach BC, CD , wówczas $\triangle AMN$ jest mniejszy od połowy równoległoboku $ABCD$. [Wskazówka: poprowadzimy z M równoległą do AB i kreślimy wysokość CX w trójkącie $\triangle ABC$].

17. W kwadracie $ABCD$ łączymy wierzchołek A ze środkiem boku BC , wierzchołek B ze środkiem boku CD , wierzchołek C ze środkiem boku DA , wreszcie D ze środkiem boku AB . Dowieść, że te cztery proste, przecinając się, wyznaczają nowy kwadrat. Znaleźć, ile razy kwadrat ten jest mniejszy od kwadratu $ABCD$.

18. Dowolny punkt P płaszczyzny łączymy z wierzchołkami trójkąta $\triangle ABC$; niech K, L, M będą środkami odcinków PA, PB, PC ; dowieść, że $\triangle KLM = \frac{1}{4} \triangle ABC$.

19. Jeżeli na prostej mamy punkty A, B, C, D , następujące po sobie w porządku wskazanym, wówczas prostokąt, zbudowany z odcinków AC i BD , jest równoważny sumie dwu prostokątów, z których jeden zbudowany jest z odcinków AC, BC , drugi zaś z odcinków AB, CD .

20. Przekątne równoległoboku dzielą go na cztery równoważne trójkąty. Sformułować i zbadać wszystkie twierdzenia odwrotne do powyższego.

21. Mamy dany równoległobok $ABCD$; jeżeli M jest jakimkolwiek punktem wewnętrznym trójkąta $\triangle ABC$, wówczas musi być $\triangle MAB + \triangle MAC = \triangle MAD$.

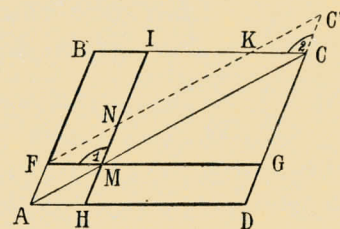
§ 178. Poznamy teraz twierdzenie, które bywa często pomocne przy przekształcaniu figur w inne, równoważne figury.

Twierdzenie. Jeżeli w równoległoboku $ABCD$ na przekątnej AC obierzemy dowolny punkt M i poprowadzimy proste

FMG, HMI (rys. 145), równoległe do boków AD, AB , wówczas otrzymamy dwa równoległoboki $MFBI, MHDG$, równoważne sobie.

Przez punkt F poprowadzmy równoległą do przekątnej AC i niech ta równoległa przecina proste HI, BC i przedłużenie boku DC odpowiednio w punktach N, K, C' .

Równoległoboki $BIMF$ i $KCMF$ są sobie równoważne, jako mające wspólną podstawę FM i równe wysokości.



Rys. 145.

Dalej mamy $MF=KC, MN=CC', \sphericalangle 1=\sphericalangle 2$,
a więc $\triangle FMN = \triangle KCC'$.

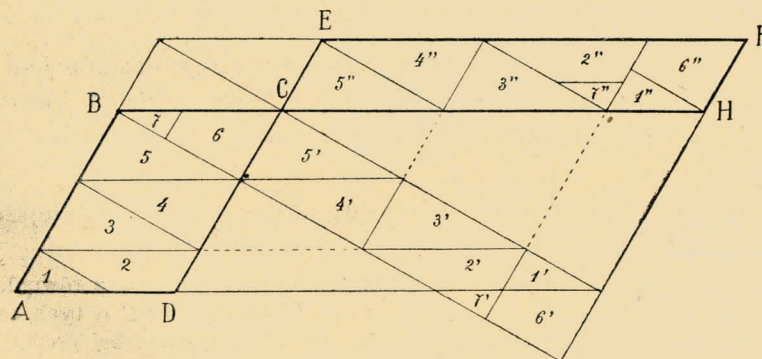
Stąd wynika, że równoległobok $BIMF$ jest też równoważny równoległobokowi $MNC'C$, ale ten jest równoważny równoległobokowi $MHDG$, o czym łatwo przekonać się.

Istotnie, $MN=AF=HM$, mają więc one równe podstawy i równe wysokości (dlaczego?)

Tak więc równoległobok $BIMF$ jest równoważny równoległobokowi $MHDG$.

Uwaga. Rzecz prosta, że równoległoboki $ABIH, AFGD$ są też równoważne sobie.

Rozumowanie powyższe nasuwa również pomysł sieci, za pomocą której możnaby wykazać bezpośrednio równoważność równoległoboków takich, jak $ABCD$ i $CEFH$. Budowę sieci widać na rys. 146. Czytelnik sam dowiezie równoważności tych dwu równoległoboków.

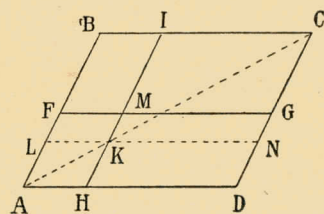


Rys. 146.

Jak widać z rysunku 146, każdą część składową równoległoboku $ABCD$ wypadnie dwukrotnie przesunąć, jeżeli chcemy otrzymać odpowiednią część równoległoboku równoważnego $CEFH$ (np. części 1, 1' i 1'').

Określenie. Dwa równoległoboki $BIMF$ i $HMGD$, o których mowa w powyższym twierdzeniu, nazywać będziemy dopełniającymi. *)

§ 179. Twierdzenie przeciwne (względem § 178). Jeżeli w równoległoboku $ABCD$ (rys. 146) obierzemy dowolny punkt wewnętrzny M , byle nie leżący na przekątnej, i przez ten punkt



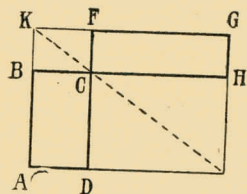
Rys. 147.

poprowadzimy równoległe do boków, wówczas otrzymamy dwa nowe równoległoboki $BIMF$ oraz $HMGD$, które nie mogą być równoważne sobie.

Czytelnik dowiedzie tego sam, kierując się załączonym rysunkiem.

§ 180. Zadanie I. Dany prostokąt przekształcić w prostokąt równoważny, którego jeden bok równałby się danemu odcinkowi m .

Rozwiązanie można oprzeć na twierdzeniu o równoległobokach dopełniających (§ 178). Uczeń sam znajdzie i uzasadni rozwiązanie, kierując się rysunkiem 148, na którym $ABCD$ jest prostokątem danym, $CFGH$ — szukany, odcinek zaś $BK = m$.



Rys. 148.

Rzecz jasna, że można również oprzeć rozwiązanie na uwadze, podanej w § 178, czyli na gnomonie.

Uwaga. Zadanie nasze posiada jedno

tylko rozwiązanie, czyli istnieje jeden tylko prostokąt, równoważny danemu prostokątowi i mający daną podstawę (lub daną wysokość).

§ 181. Uczeń rozwiąże sam następujące zadanie ogólniejsze.

*) Sześciokąt wklęsły $BADGMI$, za pomocą którego z równoległoboku $IMGC$ otrzymujemy drugi równoległobok $BADC$ o tych samych kątach, odgrywał wielką rolę w badaniach geometrów greckich i zwał się u nich *gnomonem*.

Zadanie II. Dany równoległobok przekształcić w równoważny równoległobok, mający te same kąty, lecz podstawę równą danemu odcinkowi m .

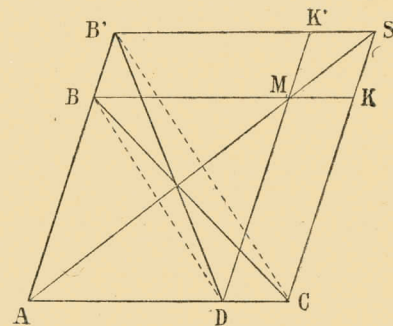
§ 182. Zadanie III. Dany trójkąt $\triangle ABC$ przekształcić w trójkąt równoważny, mający daną podstawę ($= m$) i kąt przy podstawie równy kątowi trójkąta $\triangle ABC$.

Rozwiązanie 1-sze. Uzupełniamy trójkąt dany $\triangle ABC$ do równoległoboku ($ABKC$), odkładamy $AD = m$; przez punkt D prowadzimy równoległą do boku AB , wskutek czego otrzymujemy równoległobok $ABMD$. Jeżeli przekątną AM tego drugiego równoległoboku przedłużymy aż do spotkania w punkcie S z przedłużeniem boku CK , otrzymamy nowy równoległobok $AB'SC$, a w nim gnomon $AB'K'MKC$.

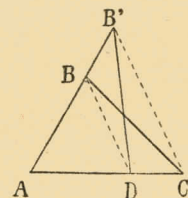
Na zasadzie uwagi do § 178, równoległoki $AB'K'D$ oraz $ABKC$ są sobie równoważne, a więc trójkąty $\triangle ABC$ oraz $\triangle AB'D$, jako połowy tych równoległoboków, muszą też być równoważne sobie.

Rozwiązanie 2-ie. Jeżeli, jak na rys. 149, podstawa $AD = m$ trójkąta szukanego jest mniejsza od podstawy AC trójkąta danego, wówczas trójkąt szukany musi mieć większą wysokość (dlaczego?). Wobec tego cały obszar $\triangle ABD$ powinien należeć do trójkąta szukanego, którego trzeci wierzchołek B' powinien leżeć na przedłużeniu boku AB . Pozostaje tedy od trójkąta danego odjąć trójkąt $\triangle BDC$ i na jego miejsce przystawić równoważny mu trójkąt $\triangle BB'D$, tak, by razem z $\triangle ABD$ utworzył on jeden trójkąt $\triangle AB'D$, który w ten sposób uczyni zadość warunkom zadania.

Aby znaleźć trójkąt $\triangle BB'D$ zauważmy, że ma on podstawę BD wspólną z trójkątem $\triangle DBC$, a ponieważ dwa te trójkąty powinny być równoważne sobie, zatem wierzchołki ich B' i C powinny leżeć na równoległej do podstawy.



Rys. 149.



Rys. 149a.

Mamy więc rozwiązanie następujące: łączymy B z D i przez C prowadzimy równoległą do BD . Punkt B' , w którym ta równoległa przecina prostą AB , jest trzecim wierzchołkiem żadanego trójkąta $\triangle AB'D$.

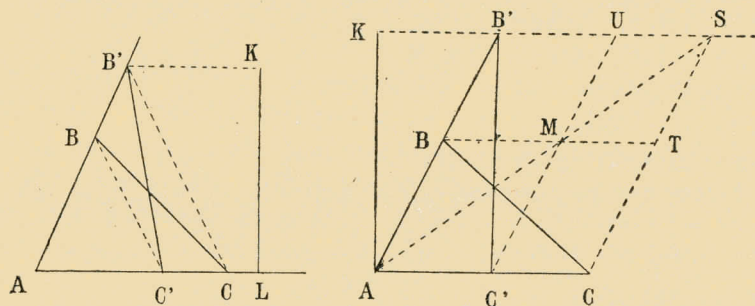
Uwagi. 1. Porównanie rysunków 149 i 149a wskazuje, że dwa te rozwiązania nie są zasadniczo różne: drugie sprowadza się pod względem konstrukcyjnym do pierwszego, jakkolwiek zostało otrzymane za pomocą zgoła odmiennego rozumowania.

2. Z porównania tych samych figur oraz obu rozwiązań wynika również, że jeśli od równoległoboku $AB'SC$ (rys. 149) odejmiemy gnomon $BB'SCDM$, otrzymamy równoległobok $ABMD$, którego przekątna BD musi być równoległa do przekątnej $B'C$ równoległoboku danego.

Zadanie IV. Dany trójkąt $\triangle ABC$ przekształcić w trójkąt równoważny o danej wysokości h , przyczym jeden z kątów przy podstawie nowego trójkąta powinien równać się kątowi $\angle BAC$.

Uczeń uzasadni sam następujące rozwiązania:

Rozwiązanie 1-e (rys. 150): wystawiamy prostopadłą do AC , na niej odkładamy $LK=h$, prowadzimy $KB' \parallel AC$, łączymy B' z C i kreślimy $BC' \parallel B'C$. Trójkąt $\triangle AB'C$ jest żądany.

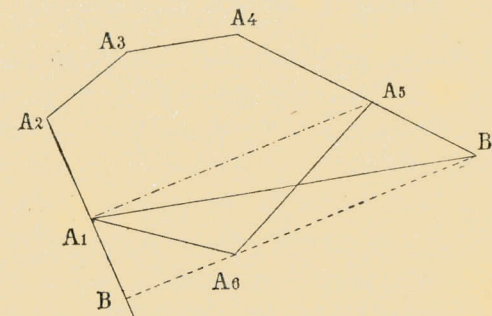


Rys. 150.

Rozwiązanie 2-e. Punkt B' znajdujemy tak samo, jak w rozwiązaniu 1-szym, poczym trójkąt dany $\triangle ABC$ uzupełniamy do równoległoboku $ABTC$, budujemy równoległobok $AB'SC$, prowadzimy w nim przekątną AS , wreszcie, mając punkt M na tej przekątnej, kreślimy gnomon $AB'UMTC$. Trójkąt $\triangle AB'C$ jest trójkątem żądanym.

§ 184. Zadanie V. Dany wielokąt o n bokach przekształcić w wielokąt równoważny, mający $n-1$ boków.

Niech będzie dany np. sześciokąt $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Prowadźmy przekątną A_1A_5 . Cały obszar pięciokąta $A_1A_2A_3A_4A_5$ powinien wejść w skład nowego wielokąta, chodzi więc o to, by trójkąt $\triangle A_1A_5A_6$ zastąpić przez trójkąt równoważny, przyczym wierzchołek tego nowego trójkąta powinien leżeć albo na przedłużeniu boku A_2A_1 , albo na przedłużeniu boku A_4A_5 .



Rys. 151.

Prowadzimy tedy przez A_6 równoległą do przekątnej A_1A_5 , punkt B' , w którym równoległa przecina prostą A_4A_5 , łączymy z A_1 (albo też punkt B , w którym równoległa przecina prostą A_2A_1 , łączymy z A_5).

Otrzymujemy żądany pięciokąt $A_1A_2A_3A_4B'$ (albo też $BA_2A_3A_4A_5$).

§ 185. O każdych dwóch odcinkach a, b możemy powiedzieć, że napewno mamy albo $a = b$, albo $a < b$, albo $a > b$.

To samo da się powiedzieć o każdych dwu kątach. Wobec tego powiadamy, że odcinki stanowią klasę wielkości (geometrycznych). Kąty również stanowią klasę wielkości geometrycznych.

Powstaje pytanie, czy obszary wielokątowe możemy też uważać za wielkości geometryczne?

Odpowiedź na to pytanie dają nam zadania I i V. Istotnie, każdy wielokąt o n bokach możemy przekształcić w równoważny wielokąt o $n-1$ bokach, ten znów w wielokąt o $n-2$ bokach, i t. d., aż otrzymamy czworobok (zadanie V). Czworobok możemy przekształcić w prostokąt (§ 173), ten zaś w inny prostokąt o danej podstawie (zadanie I).

W ten sposób każde dwa wielokąty W_1, W_2 możemy przekształcić w prostokąty o równych podstawach; na mocy zaś

pewnika V o tych dwu prostokątach P_1, P_2 zawsze możemy orzec, czy

$$P_1 = P_2, \text{ czy też } P_1 > P_2, \text{ lub } P_1 < P_2.$$

(zależy to od wysokości prostokątów P_1, P_2), a więc o każdych dwu wielokątach W_1, W_2 możemy orzec, czy są one równoważne sobie, czy też jeden z nich jest większy, i który mianowicie.

Widzimy więc, że obszary wielokątowe mamy prawo uważać za nową klasę wielkości geometrycznych.

Odtąd równoważność dwóch wielokątów oznaczać będziemy znakiem $=$. Będziemy więc pisali

$$W_1 = W_2 \text{ albo } W_1 > W_2, \text{ lub } W_1 < W_2$$

przyczym W_1, W_2 mogą być wielokątami dowolnego kształtu.

§ 186. Określenie. Jeżeli A, B, C są trzema wielokątami, przyczym $A = B + C$, wówczas C nazywamy różnicą wielokątów A i B . Tak samo B nazywamy różnicą wielokątów A i C .

Piszemy tedy $A - B = C$ oraz $A - C = B$.

Twierdzenie. Różnice wielokątów równoważnych są sobie równoważne.

Niech będą dane cztery wielokąty A, B, A', B' ,

przyczym $A = A', B = B'$ (1)

Oznaczamy ich różnice przez C i C' , tak iż

$$A - B = C, \quad A' - B' = C'.$$

Mamy dowieść, że $C = C'$.

W tym celu napiszmy (na mocy określenia różnicy wielokątów):

$$A + C = B, \quad A' + C' = B'. \quad \dots \dots (2)$$

Na mocy związku (1) i (2) mamy

$$A + C = A' + C' \quad \dots \dots \dots (3)$$

Gdyby wielokąty C i C' nie były równoważne sobie, gdyby np. było $C > C'$, wówczas musiałoby być

$$C = C' + C'' \quad \dots \dots \dots (4)$$

Z równości (4) i (3) wynika, że mielibyśmy wówczas

$$A + C' + C'' = A' + C'.$$

co jest niedorzeczne wobec tego, że sumy wielokątów równoważnych są sobie równoważne, czyli, że powinniśmy mieć

$$A + C = A' + C'.$$

§ 187. Posiadamy teraz trzy sposoby poznawania równoważności dwóch wielokątów W_1, W_2 , a mianowicie:

1-o możemy rozłożyć je na jednakową ilość części parami równych sobie (§ 173);

2-o możemy wykazać, że wielokąt W_1 nie jest ani większy ani mniejszy od W_2 (§ 185);

3-o możemy odjąć od obu wielokątów inne jakieś wielokąty równoważne sobie, w_1, w_2 ; jeżeli przytym okaże się, że

$$W_1 - w_1 = W_2 - w_2,$$

wówczas niewątpliwie musi być

$$W_1 = W_2.$$

Ćwiczenia XXVII. Własności trójkątów i równoległoboków, stanowiące treść zadań 1 — 6, pozostają w ścisłym związku z własnościami równoległoboków dopełniających i gnomonu (porówn. uwagę do § 178, str. 159). Zostały one jednak ułożone w takim porządku, że czytelnik dowieść ich może zupełnie niezależnie od teorii gnomonu.

1. Jeżeli poprowadzimy dowolną prostą, równoległą do boku BC trójkąta $\triangle ABC$ i przecinającą boki AB, AC (lub ich przedłużenia) odpowiednio w punktach K, L , wówczas środkowa AD trójkąta danego podzieli w punkcie O na połowy odcinek KL . [Wskazówka: Z tego, że $\triangle BKD = \triangle DLC$, wynika, że $\triangle AKD = \triangle ALD$, a więc wysokości tych dwu trójkątów równają się sobie; stąd wynika równoważność trójkątów $\triangle AKO, \triangle ALO$, że zaś mają one wspólną wysokość, poprowadzoną z wierzchołka A , zatym podstawy ich KO, LO muszą być sobie równe].

2. Na poprzednim zadaniu oprzeć sposób dzielenia odcinka na dowolną liczbę części równych.

3. Opierając się na tym samym zadaniu i posługując się wyłącznie liniałem, rozwiązać zadanie następujące: dany odcinek AB podzielić na połowy, jeżeli mamy daną prostą m , równoległą do AB .

4. Na mocy tego samego zadania 1-go dowieść, że jeżeli prosta m , równoległa do przekątnej BD równoległoboku $ABCD$, przecina boki a, d równoległoboku w punktach K, L , wówczas czwarty wierzchołek X równoległoboku $AKXL$ leży na prostej AC .

5. Jeżeli w równoległoboku $ABCD$ obierzemy na przekątnej AC dowolny punkt X i zbudujemy równoległobok $AKXL$, którego wierzchołki K, L leżą odpowiednio na AB i na AD , wówczas przekątna KL jednego równoległoboku musi być równoległa do przekątnej BD drugiego równoległoboku. [Wskazówka: założmy, że tak nie jest, że więc inny odcinek KL' jest równoległy do BD ; w takim razie, na mocy poprzedniego zadania, $AKXL'$ musi być równoległobokiem, etc.].

6. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ środkowe BD , CE przecinają się w punkcie M , wówczas trójkąt $\triangle BMC$ musi być równoważny czworobokowi $ADME$.

7. Jeżeli w trójkątach $\triangle ABC$, $\triangle AB'C'$ kąty $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle B'AC'$ są wierzchołkowe i jeżeli proste BB' , CC' są do siebie równoległe, wówczas trójkąty te są równoważne.

Dwa trójkąty w ten sposób położone będziemy nazywali wierzchołkowymi.

7a. Czy twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeżeli trójkąty zamiast kątów wierzchołkowych mają przy A kąt spólny?

8. W trójkącie $\triangle ABC$ punkty C' , B' są środkami boków c , b . Dowieść za pomocą równoważności trójkątów, że $C'B' \parallel CB$.

9. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ na środkowej AA' obierzemy dowolny punkt P , wówczas musi być $\triangle ABP = \triangle ACP$.

10. Wewnątrz trójkąta $\triangle ABC$ znaleźć taki punkt X , żeby było $\triangle ABX = \triangle ACX = \triangle BCX$.

11. Punkt P jest dowolnym punktem wewnętrznym lub zewnętrznym równoległoboku $ABCD$; dowieść, że suma lub różnica trójkątów $\triangle PAB$, $\triangle PCD$ jest równoważna połowie równoległoboku.

12. Jeżeli środek jednego z nierównoległych boków trapezu połączymy z końcami boku przeciwległego, otrzymamy trójkąt, równoważny połowie trapezu.

12a. Łącząc środki M , N boków AB , CD czworoboku z wierzchołkami, otrzymujemy trójkąty $\triangle MCD$, $\triangle NAB$, których suma jest równoważna czworobokowi $ABCD$.

13. Trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ są równoważne, jeżeli $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.

14. Dwieścienne kątów wewnętrznych prostokąta wyznaczają kwadrat, równoważny połowie kwadratu, zbudowanego na różnicy boków danego prostokąta.

14a. Znaleźć twierdzenie analogiczne dla kwadratu, utworzonego przez dwieścienne zewnętrzne prostokąta.

15. Środki boków czworoboku wypukłego wyznaczają równoległobok, równoważny połowie czworoboku.

15a. Środki boków czworoboku związanego wyznaczają równoległobok równoważny różnicy dwóch trójkątów, z których składa się obszar, ograniczony przez boki czworoboku.

16. Opierając się na konstrukcji, podanej na rys. 137 (str. 151), rozwiązać zadanie następujące: dany prostokąt przekształcić w równoważny czworobok, w którym mamy dane: bok a i kąty A , B , przekątna zaś e równa się jednemu z boków prostokąta.

17. Trójkąt dany $\triangle ABC$ przekształcić w równoważny trójkąt $\triangle ABC'$, mając dany kąt $\sphericalangle C'$.

17a. Trójkąt $\triangle ABC$, przekształcić w równoważny trójkąt prostokątny, w którym bok c byłby przeciwprostokątną. Kiedy zadanie jest niemożliwe?

18. Trójkąt dany przekształcić: 1-o w trójkąt równomierny o tej samej podstawie; 2-o w trójkąt równomierny o tej samej wysokości; 3-o w trójkąt prostokątny o tej samej podstawie.

18a. Dany równoległobok przekształcić w równoważny równoległobok tak, by zachować przytym jego większą przekątną i by w nowym równoległoboku dwa boki równały się danemu odcinkowi m .

18b. Równoległobok $ABCD$ przekształcić w romb tak: 1-o by bok a był przekątną rombu, 2-o by przekątna e była przekątną rombu.

18c. W dane koło wpisać prostokąt równoważny danemu prostokątowi.

Trójkąt $\triangle MNP$ przekształcić w równoważny trójkąt $\triangle ABC$ mając dane:

19. a, b .	20. a, h_c	21. A, h_c .
22. h_a, h_c ,	23. h_c, s_c .	24. h_c, R .

Równoległobok $MNPQ$ przekształcić w równoważny równoległobok $ABCD$, mając dane:

25. e, f .	26. $f, \sphericalangle(a, e)$.	27. a, ω
--------------	----------------------------------	-----------------

28. Czworobok $ABCD$ przekształcić w taki czworobok, by przekątna dzieliła go na połowy. Przy tym przekształceniu winny być zachowane e, f, ω . [Wskazówka: przez środek przekątnej f równoległą od e , przez końce przekątnej e równoległe do f].

29. Czworobok $ABCD$ przekształcić w równoległobok, zachowując e, f, ω .

30. Pięciokąt wypukły przekształcić bezpośrednio w trójkąt.

31. Dany jest kąt $\sphericalangle BAC$ i punkt O na ramieniu AB . Z punktu O wykreślić koło, przecinające drugie ramię kąta w punktach M, N tak, by trójkąt $\triangle OMN$ był równoważny danemu trójkątowi $\triangle DEF$.

32. Dany kąt $\sphericalangle MNP$ i punkt O na jego drugiej dwieściennej. Z punktu O kreślimy koło, przecinające ramiona kąta w punktach A, A', B, B' . W jaki sposób należy zbudować to koło, jeżeli trapez $AA'B'B$ ma być równoważny danemu trójkątowi $\triangle DEF$? [Wskazówka: 1) porówn. ćwiczenie 22. 2) można też wyznaczyć linię środkową trapezu, prowadząc z punktu O prostopadłe do ramion kąta].

33. Za pomocą prostej, przechodzącej przez wierzchołek, podzielić trójkąt na dwie części równoważne sobie.

34. To samo zadanie, jeżeli zamiast trójkąta dany jest czworobok.

35. Dany trójkąt podzielić na dwie równoważne części za pomocą prostej, poprowadzonej przez punkt dany na boku trójkąta.

36. Dany trójkąt podzielić na dwie części równoważne sobie zapomocą prostej: 1-o równoległej do jednego z boków; 2-o prosto padłej do jednego z boków.

37. Dany równoległobok podzielić na dwie części równoważne za pomocą prostej: 1-o przechodzącej przez dany punkt; 2-o prostopadłej do danej prostej.

38. Uzasadnić następujący podział trójkąta na 5 równych części zapomocą prostych, wychodzących z jednego punktu na boku trójkąta: niech będzie dany punkt D na boku BC trójkąta $\triangle ABC$; dzielimy BC na 5 równych części w punktach E_1, E_2, E_3, E_4 , prowadzimy odcinki $E_1F_1 // E_2F_2 // E_3F_3 // E_4F_4 // DA$, wreszcie łączymy D z punktami F_1, F_2, F_3, F_4 .

39. Dany trójkąt podzielić na trzy równoważne części za pomocą poprzecznych, poprowadzonych z jednego wierzchołka.

40. Równoległobok podzielić na n części równoważnych za pomocą poprzecznych, poprowadzonych z jednego wierzchołka. Sporządzić dwa rysunki, odpowiadające dwóm przypadkom: 1-o gdy n jest liczbą parzystą, 2-o gdy n jest liczbą nieparzystą.

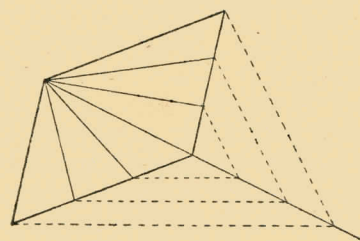
[Wskazówka: w przypadku pierwszym porówn. rys. 153].

41. Za pomocą konstrukcji analogicznej do poprzedniej podzielić dany trapez na 3 równoważne sobie trapezy tak, by ich podstawy leżały na podstawach trapezu danego.

42. Dane są dwa równoległoboki o równych kątach; zbudować trzeci równoległobok, mający te same kąty i równoważny różnicy danych równoległoboków.

43. Uzasadnić następujący podział wielokąta na n części równoważnych, zapomocą prostych, wychodzących z danego punktu wewnętrznego. Niech będzie dany (rys. 154) wielokąt $A_1A_2 \dots A_7$, i punkt wewnętrzny O . Przypuśćmy, że mamy podzielić wielokąt na 5 części równoważnych. Łączymy najpierw O z dowolnym punktem K na konturze wielokąta, następnie kreślimy $KE_1 // AO_1$, potem $B_1B_2 // OA_2$, $B_2E_3 // OA_3$, i t. d. aż otrzymamy punkt E_7 na przedłużeniu ostatniego boku A_1A_7 . Trójkąt $\triangle OKB_7$ jest równoważny danemu wielokątowi (dlaczego?). Bok KB_7 trójkąta dzielimy na 5 części równych i przez punkty podziału prowadzimy linie łamane (na rysunku oznaczone kropkami), równoległe do łamanej $E_1B_2B_3 \dots B_7$. W ten sposób na konturze wielokąta otrzymamy 5 punktów: $K \equiv K_1', K_2', K_3', K_4', K_5'$. Łącząc je wszystkie z punktem O , podzielimy dany wielokąt na 5 części równoważnych sobie.

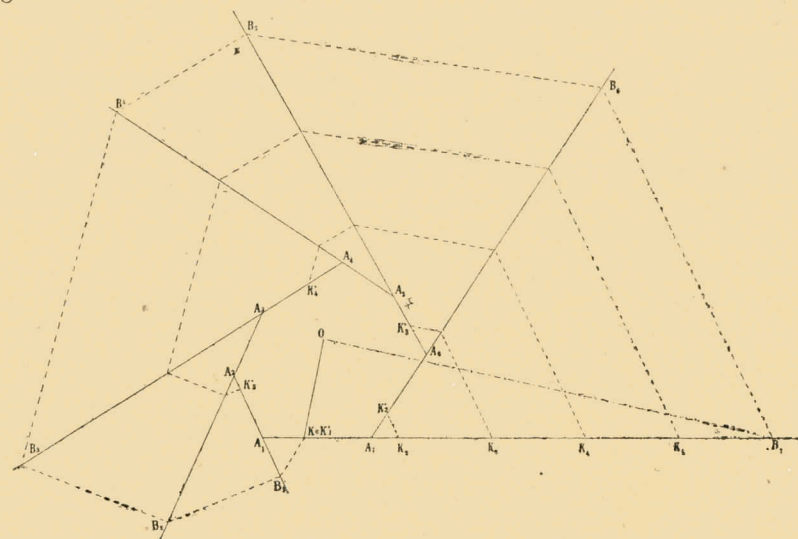
44. Jeżeli mamy dane dwa wielokąty wypukłe o jednakowej parzystej liczbie boków i jeżeli środki boków jednego z nich są zarazem środkami boków drugiego, wówczas wielokąty są sobie równoważne.



Rys. 153.

[Wskazówka: łączymy odpowiednie wierzchołki wielokątów prostymi, które wszystkie są do siebie równoległe, i prowadzimy prostą m do nich prostopadłą].

45. Jeżeli każdy wierzchołek równoległoboku połączymy z środkami dwóch boków, otrzymamy ośm prostych, które wewnątrz równoległoboku wyznaczają ośmiokąt, równoważny $1/8$ części równoległoboku.



Rys. 154.

46. Dowieść: 1-o że z trzech środkowych trójkąta $\triangle ABC$ można zawsze zbudować trójkąt;

2-o że środkowe nowego trójkąta równają się $3/4$ boków trójkąta $\triangle ABC$;

3-o że nowy trójkąt jest równoważny $3/4$ części trójkąta $\triangle ABC$.

47. Jeżeli przeciwległe boki AB, DC czworoboku przecinają się w punkcie M , punkty zaś P, Q są środkami przekątnych AC, BD wówczas trójkąt $\triangle MPQ$ jest równoważny czwartej części czworoboku $ABCD$.

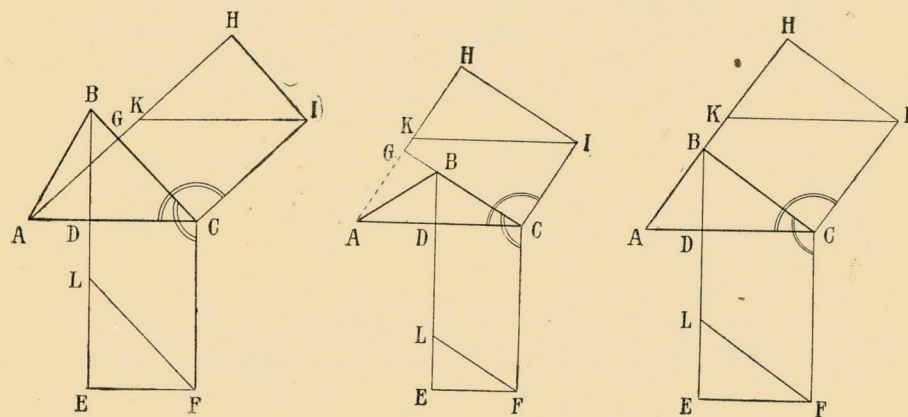
48. Na zasadzie poprzedniego twierdzenia dowieść, że środki trzech przekątnych czworoboku zupełnego leżą na jednej prostej*).

*) Jeżeli w czworoboku $ABCD$ przedłużymy boki AB, DC aż do przecięcia w M , boki zaś BC, AD aż do przecięcia się w L , powiadamy, że otrzymaliśmy czworobok zupełny $ABCDML$. Ma on sześć wierzchołków i trzy przekątne AC, BD, ML ; każdy jego bok przechodzi przez trzy wierzchołki.

ROZDZIAŁ II.

Zastosowania do trójkątów: twierdzenie
Pitagorasa i jego uogólnienie.

§ 188. Twierdzenie. Prostokąt, zbudowany z boku trójkąta i z rzutu na niego drugiego boku, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z tego drugiego boku i z rzutu na niego boku pierwszego.



Rys. 155.

Jeżeli w prostokącie $DEFC$ (rys. 155) mamy $DE = AC$, w prostokącie zaś $CGHI$ mamy $CI = BC$, wówczas wystarczy poprowadzić odcinki

$$LF \parallel BC \text{ oraz } IK \parallel AC.$$

Równoległobok $LFCB$ jest równoważny prostokątowi $DEFC$ (dlaczego?), a równoległobok $ACIK$ jest równoważny prostokątowi $CGHI$ (dlaczego?).

Ale dwa te równoległoboki są sobie równe, gdyż

$$CI = LF, \quad AC = CF, \quad \sphericalangle ICA = \sphericalangle BCF.$$

Wobec tego istotnie prostokąt $DEFC$ jest równoważny prostokątowi $CGHI$.

§ 189. W przypadku szczególnym, gdy trójkąt $\triangle ABC$ jest prostokątny, przyprostokątna BC (rys. 155) jest zarazem rzutem przeciwprostokątnej na prostą BC , wobec czego zamiast prostokąta $CGHI$ mamy kwadrat $CBHI$. W tym szczególnym przypadku twierdzenie nasze przybiera postać następującą:

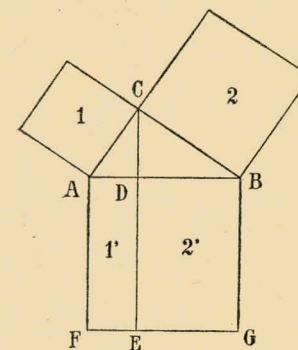
Twierdzenie. Kwadrat, zbudowany na przyprostokątnej, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z przeciwprostokątnej i z rzutu tej samej przyprostokątnej na przeciwprostokątną.

§ 190. Twierdzenie Pitagorasa. Kwadrat, zbudowany na przeciwprostokątnej, jest równoważny sumie kwadratów, zbudowanych na dwu przyprostokątnych.*)

Istotnie, jeżeli poprowadzimy $DE \perp AB$, wówczas kwadrat $ABGF$ podzielimy na dwa prostokąty, oznaczone na rysunku numerami 1' i 2'.

Na mocy § 189, prostokąt 1' jest równoważny kwadratowi 1, prostokąt zaś 2' jest równoważny kwadratowi 2.

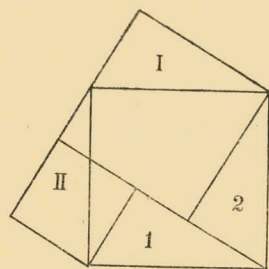
Równie prosty dowód można otrzymać, dzieląc te trzy kwadraty bezpośrednio na figury parami rów-



Rys. 156.

*) Według tradycji greckiej, twierdzenie to znalazł i udowodnił filozof Pitagoras z Samosu (VI w. przed Chr.), który żył i nauczał w Krotonie, w południowej Italji, mniej więcej w okresie wypędzenia Tarkwinjuszów z Rzymu. Pitagoras sam nic nie pisał; z dzieł jego uczniów dochowały się tak drobne urywki, że nic pewnego nie możemy powiedzieć o badaniach naukowych tego filozofa. Z różnych powodów wydaje się rzeczą prawdopodobną, że Pitagoras spędził czas jakiś w Egipcie, gdzie poznał szczególne przypadki powyższego twierdzenia (np. trójkąt o bokach, równających się 3, 4 i 5 jednostkom miary), sam zaś uogólnił twierdzenie na wszelkie trójkąty prostokątne i pierwszy dowiódł go. Dziś zresztą niepodobna zgadnąć, na czym mógł polegać jego dowód.

Przekonamy się w dalszym ciągu, że tw. Pitagorasa należy do najważniejszych twierdzeń geometrii.

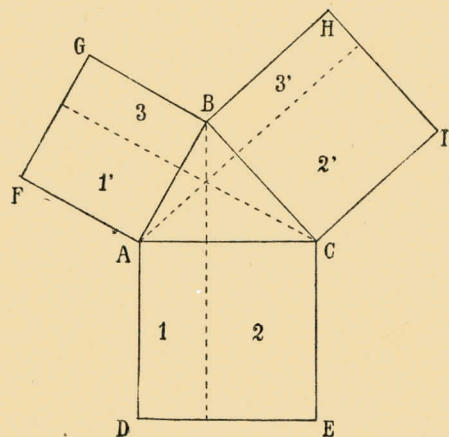


Rys. 157.

ne sobie. Dowód ten wynika z rys. 157. Czytelnik przeprowadzi go szczegółowo.

§ 191. Jak twierdzenie Pitagorasa wynika z § 189, tak z ogólniejszej własności, dowiedzionej w § 188 wynikają dwa ogólniejsze twierdzenia, dotyczące trójkątów dowolnych.

Twierdzenie. Kwadrat na boku przeciwległym kątowi ostremu jest mniejszy od sumy kwadratów, zbudowanych na dwu drugich bokach, o podwojony prostokąt, zbudowany z jednego z tych boków i z rzutu na niego drugiego boku.



Rys. 158.

Niech $ACED$, $AFGB$, $BHIC$ będą kwadratami, zbudowanymi na bokach trójkąta $\triangle ABC$, w którym kąt $\sphericalangle ABC$ jest ostry. Jeżeli wykreślimy trzy wysokości tego trójkąta i przedłużymy je, wówczas każdy z trzech powyższych kwadratów zostanie podzielony na dwa prostokąty, przyczym (§ 188) prostokąty 1 i 1' są sobie równoważne, jak również 2 i 2' oraz 3 i 3'.

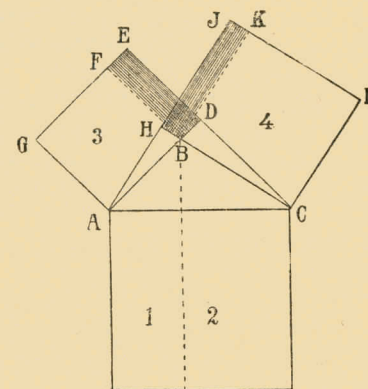
Wobec tego suma prostokątów 1 i 2, czyli kwadrat na boku AC , mniejszy jest od sumy dwu drugich kwadratów o podwojony prostokąt 3 (lub też 3').

§ 192. **Twierdzenie.** Kwadrat boku przeciwległego kątowi rozwartemu jest większy od sumy kwadratów dwu drugich boków o podwojony prostokąt, zbudowany z jednego z tych boków i z rzutu na niego drugiego boku.

Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ kąt $\sphericalangle B$ jest rozwarty, wówczas, prowadząc wysokości i podłużając je, mamy.

prostokąt 1 jest równoważny prostokątowi $ADEG$, który składa się z kwadratu 3 i z prostokąta $BDEF$;

prostokąt 2 jest równoważny prostokątowi $HILC$, który składa się z kwadratu 4 i z prostokąta $HIKB$, a ponieważ (§ 188) prostokąty $HIKB$, $BDEF$ są sobie równoważne, zatem kwadrat na boku AC większy jest od sumy kwadratów 3 i 4 o podwojony prostokąt $BDEF$ (lub o podwojony prostokąt $HBKJ$).



Rys. 159.

§ 193. Twierdzenie Pitagorasa wraz z twierdzeniami §§ 191, 192 tworzą układ zamknięty (porówn. str. 50), co łatwo uwidocznic, streszczając je w następujący sposób:

$$\text{jeżeli } \sphericalangle C = \delta \text{ to } \boxed{c} = \boxed{a} + \boxed{b}$$

$$\text{jeżeli } \sphericalangle C < \delta \text{ to } \boxed{c} < \boxed{a} + \boxed{b}$$

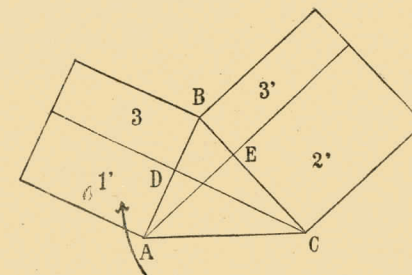
$$\text{jeżeli } \sphericalangle C > \delta \text{ to } \boxed{c} > \boxed{a} + \boxed{b}$$

Wobec tego mamy prawo odwrócić wszystkie trzy twierdzenia.

Uczeń sformułuje sam twierdzenia odwrotne.

Uwagi. 1. Jak widzimy, twierdzenie Pitagorasa wyraża cechę charakterystyczną trójkąta prostokątnego: mając dane trzy boki trójkąta i opierając się na §§ 190—193, możemy zawsze orzec, czy dany bok leży naprzeciwko kąta prostego, ostrego czy rozwartego.

2. Twierdzenie Pitagorasa można uważać za przypadek szczególny zarówno twierdzenia § 192 o boku, leżącym naprzeciw kąta rozwartego, jak twierdzenia § 191 o boku przeciwległym kątowi ostremu. Istotnie, jeżeli wyobrazimy sobie trójkąt

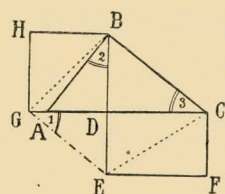


Rys. 160.

zmienny ABC (rys. 160). w którym bok BC jest nieruchomy, bok zaś AB obraca się dokoła B w zwrocie oznaczonym strzałką, zachowując stałą długość, wówczas kąt ostry $\angle ABC$ musi rosnać. Wobec tego rośnie przeciwny bok AC (§ 103), a więc i kwadrat na tym boku zbudowany, natomiast rzut BD boku BC maleje, jak również rzut BE boku AB . Innymi słowami: maleją prostokąty 3 i 3', o które kwadrat boku AC różni się od sumy kwadratów, zbudowanych na bokach AB i BC . W chwili, gdy kąt $\angle ABC$ staje się prosty, znikają (stają się równe zero) zarówno rzuty BD i BE , jak i prostokąty 3 i 3', a wówczas kwadrat na boku AC równa się sumie kwadratów na bokach AB i BC , i mamy twierdzenie Pitagorasa.

Uczeń zbada w podobny sposób zmiany, które zachodzą, gdy kąt rozwarty trójkąta stopniowo maleje, aż staje się równy prostemu.

§ 194. Twierdzenie. W trójkącie prostokątnym kwadrat wysokości, poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z dwóch odcinków, na które ta wysokość dzieli przeciwprostokątną.



Rys. 161.

Niech będzie dany trójkąt $\triangle ABC$, w którym $\angle B = \delta$ i niech będzie $BD \perp AC$. Budujemy kwadrat $BDGH$ i twierdzimy, że jest on równoważny prostokątowi $DEFC$, w którym $DE = AD$.

Istotnie, $\triangle DGE \equiv \triangle ABD$ (dlaczego?);

zatem $\angle 1 = \angle 2$,

że zaś $\angle 2 = \angle 3$ (dlaczego?),

musi więc być $\angle 1 = \angle 3$

czyli proste BC , GE są do siebie równoległe.

Wobec tego trójkąty $\triangle EDC$, $\triangle GBD$, jako wierzchołkowe zawarte między równoległymi (zadanie 7, str. 166), są sobie równoważne, a ponieważ pierwszy jest połową prostokąta $DEFC$, drugi zaś stanowi połowę kwadratu $GHBD$, zatem kwadrat ten i prostokąt są sobie równoważne.

Ćwiczenia XXIX. 1. Zbudować kwadrat równoważny danemu prostokątowi, opierając się na twierdzeniu § 189.

1a. Rozwiązać to samo zadanie, opierając się na § 194.

2. Jeżeli w prostokącie $ABCD$ mamy $\frac{a}{2} < b < a$, wówczas za

pomocą następującej konstrukcji możemy podzielić prostokąt na trzy części, z których daje się ułożyć równoważny kwadrat:

na boku AB , jako na średnicy, kreślimy koło; na tym samym boku odkładamy odcinek $AD' = AD$; w punkcie D' wystawiamy prostą, która przecina koło w punkcie E ; wreszcie kreślimy prostą BE . W ten sposób prostokąt dany został podzielony na 2 trójkąty prostokątne i na czworobok; dowieść, że z tych trzech figur można ułożyć kwadrat.

3. Zbudować kwadrat, który byłby równoważny:

1) sumie dwu danych kwadratów $\boxed{a} + \boxed{b}$;

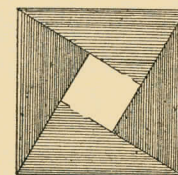
2) różnicy dwu danych kwadratów $\boxed{a} - \boxed{b}$;

3) połowie danego kwadratu $\boxed{a}$.

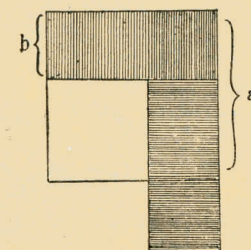
4. Jeżeli przekątne czworoboku są do siebie prostopadłe, wówczas suma kwadratów, zbudowanych na dwóch bokach przeciwnych, jest równoważna sumie kwadratów, zbudowanych na dwu drugich bokach.

5. Budujemy pięciokąt $ABCDE$, w którym kąt $\angle B$ jest prosty, bok zaś CD jest prostopadły do przekątnej AC . Jak należy wykreślić bok DE , żeby kwadrat, zbudowany na boku AE , był równoważny sumie kwadratów, zbudowanych na czterech innych bokach pięciokąta.

6. Matematyk hinduski Bhaskara, (XII w. po Chr.) podaje w swym traktacie matematyki twierdzenie Pitagorasa bez dowodu, zaopatrując je tylko rysunkiem 162 i wykrzyknikiem: „patrz!”



Rys. 162.



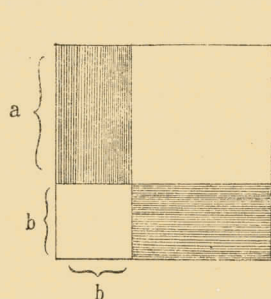
Rys. 162a.

Dowieść tego twierdzenia, ustalwszy najpierw za pomocą rysunku 162a prawdziwości związku

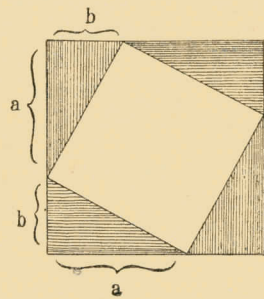
$$\boxed{a-b} = \boxed{a} + \boxed{b} - 2 \boxed{a \cdot b}$$

(Porównaj z analogicznym wzorem (gebrzel)

7. Zapomocą rysunku 163 dowieść prawdziwości związku $\boxed{a+b} = \boxed{a} + \boxed{b} + 2\boxed{a, b}$, następnie dowieść twierdzenie Pitagorasa za pomocą rysunku 163a*)



Rys. 163.



Rys. 163a.

8. Dowieść, że $\boxed{a-b, a+b} = \boxed{a} - \boxed{b}$. Jaki jest analogiczny wzór w algebrze?

9. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$, w którym $CB = CA$, poprowadzimy do boku AB dowolny odcinek CD , wówczas musi być $\boxed{AD, DB} = \boxed{AC+CD, AC-CD}$

10. Jeżeli cięciwa AB przecina w punkcie C średnicę, tworząc z nią kąt $= \frac{1}{2}\delta$, wówczas suma kwadratów $\boxed{AC} + \boxed{CB}$ jest równoważna podwojonemu kwadratowi promienia.

11. Kwadrat, zbudowany na wysokości trójkąta równobocznego, jest trzy razy większy od kwadratu, zbudowanego na połowie boku.

12. Kwadrat, zbudowany na boku trójkąta równobocznego, jest trzy razy większy od kwadratu, zbudowanego na promieniu koła opisanego.

13. Na bokach trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$ budujemy na zewnątrz kwadraty i łączymy ich wierzchołki tak, że powstaje sześciokąt wypukły. Dowieść, iż suma kwadratów, zbudowanych na bokach tego sześciokąta, jest 8 razy większa od kwadratu, zbudowanego na przeciwprostokątnej AB .

14. W równoległoboku $ABCD$ mamy zawsze $\boxed{e} + \boxed{f} = \boxed{a} + \boxed{b} + \boxed{c} + \boxed{d}$.

*) Niektórzy historycy matematyki przypuszczają, że takim mógł być oryginalny dowód Pitagorasa.

15. Jeżeli w równoległoboku $ABCD$ przekątna e równa się bokom a i c , wówczas druga przekątna f spełnia warunek $\boxed{f} = \boxed{e} + \boxed{b} + \boxed{d}$.

16. Jeżeli przez m_c oznaczymy środkową, poprowadzoną do boku c w trójkącie $\triangle ABC$, wówczas musi zachodzić zależność następująca:

$$4\boxed{m_c} + \boxed{c} = 2\boxed{a} + 2\boxed{b}.$$

17. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ przedłużymy w tym samym zwrocie*) boki a, b, c o odcinki $CE = \frac{a}{2}$, $AF = \frac{b}{2}$, $BD = \frac{c}{2}$ i jeżeli poprowadzimy w tym trójkącie środkowe AA', BB', CC' , wówczas suma kwadratów, zbudowanych na odcinkach AE, BF, CD , musi być większa od sumy kwadratów, zbudowanych na środkowych, o sumę kwadratów boków, t. j. o $\boxed{a} + \boxed{b} + \boxed{c}$. [Wskazówka: bok a jest środkową w trójkącie $\triangle CC'D$, w którym $C'D = c$ i. t. d.].

18. Jeżeli na średnicy koła obierzemy punkty A, B w jednakowej odległości od środka koła O i jeżeli M jest dowolnym punktem okręgu, wówczas suma kwadratów $\boxed{AM} + \boxed{BM}$ jest wielkością stałą, a mianowicie jest dwa razy większa od sumy kwadratów $\boxed{MO} + \boxed{AO}$.

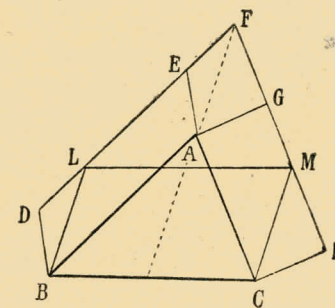
19. Jeżeli suma kwadratów odległości punktu M od dwóch punktów nieruchomych A, B jest wielkością stałą, wówczas miejscem geometrycznym punktu M jest okrąg koła, którego środkiem jest środek odcinka AB .

Wskazać sposób zbudowania tego okręgu.

20. Jeżeli różnica kwadratów odległości punktu M od dwóch punktów nieruchomych A i B jest wielkością stałą, wówczas miejscem geometrycznym punktu M jest prosta, prostopadła do AB .

21. W trapezie suma kwadratów przekątnych jest równoważna sumie kwadratów dwóch boków nierównoległych, więcej podwojony prostokąt, zbudowany z obu podstaw trapezu.

22. Na bokach b, c trójkąta $\triangle ABC$ budujemy dowolne równoległoki, boki ich DE, GH przedłużamy aż do przecięcia się w punkcie F , wreszcie na boku a budujemy równo-



Rys. 164.

*) Patrz odsyłacz na str. 37.

leńłobok $BLMC$, którego boki BL , CM są równoległe do FA , wierzchołki zaś L , M leżą na bokach DE , GH poprzednich równoleńłoboków. Dowieść, iż ten trzeci równoleńłobok jest równoważny sumie dwu pierwszych (Twierdzenie Pappusa z Aleksandrji, słynnego matematyka greckiego w III w. po Chr.).

23. Wykazać, iż twierdzenie Pitagorasa wynika z tw. Pappusa jako szczególny jego przypadek.

24. Dane są dwa koła zewnętrznie do siebie styczne; dowieść, iż kwadrat ich wspólnej stycznej zewnętrznej jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu ze średnic obu kół.

25. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ kwadrat, zbudowany na wysokości h_c , jest mniejszy od prostokąta, zbudowanego z rzutów r_a , r_b , wówczas kąt $\sphericalangle C > \delta$ w przeciwnym zaś razie mamy $\sphericalangle C < \delta$.

26. Dany odcinek AB podzielić na takie dwie części AC , CB , żeby zachodził związek $\boxed{AB, AC} = m \boxed{CB}$, w którym m oznacza liczbę daną. [W s k a z ó w k a: budujemy prostokąt

$$\boxed{AB, AX}, \text{ gdzie } AX = \frac{1}{m} AB].$$

27. Jeżeli z wierzchołków kwadratu $ABCD$ poprowadzimy prostopadłe a' , b' , c' , d' do dowolnej prostej, wówczas suma kwadratów dwóch prostopadłych, poprowadzonych z dwóch przeciwległych wierzchołków, jest równoważna podwojonemu prostokątowi z dwu drugich prostopadłych więcej dany kwadrat, czyli

$$\boxed{a'} + \boxed{c'} = 2 \cdot \boxed{b', d'} + \boxed{AB}$$

28. Suma kwadratów, zbudowanych na bokach dowolnego czworoboku, jest równoważna sumie kwadratów zbudowanych na przekątnych, więcej cztery razy wzięty kwadrat odcinka, łączącego środki przekątnych.

Co staje się z tym twierdzeniem, jeżeli odcinek, łączący środki przekątnych, maleje coraz bardziej, staje się równy zeru?

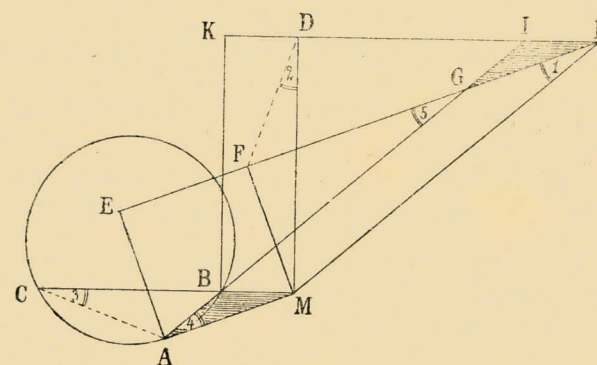
29. Suma kwadratów, zbudowanych na bokach pięciokąta, jest równoważna sumie kwadratów wszystkich przekątnych, więcej cztery razy wzięta suma kwadratów odcinków, łączących środki tych przekątnych.

30. Jeżeli mamy dane stałe koło i trójkąt $\triangle ABC$, wpisany w to koło, i jeżeli wierzchołek A trójkąta pozostaje stały, wierzchołki zaś B i C poruszają się po kole tak, iż suma kwadratów $\boxed{AB} + \boxed{AC}$ pozostaje stała, wówczas środek X boku BC kreśli prostą, prostopadłą do średnicy, przechodzącej przez A [W s k a z ó w k a: ćwiczenia 20 i 16].

ROZDZIAŁ III.

Prostokąty, zbudowane z cięciw.

§ 195. Twierdzenie. Jeżeli z tego samego punktu poprowadziliśmy do koła styczną i sieczną, wówczas kwadrat stycznej jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z całej siecznej i z zewnętrznego jej odcinka.



Rys. 165.

Niech będzie dany punkt M , leżący zewnątrz koła; niech MA będzie styczną do danego koła, MBC zaś sieczną. Zbudujmy na stycznej kwadrat, na odcinku zaś MB prostokąt, którego drugi bok MD niech się równa siecznej MC . Powiadam iż kwadrat $AEFM$ i prostokąt $MBKD$ są sobie równoważne.

Przedłużmy bok EF kwadratu aż do przecięcia się w punkcie H z prostą KD , połączmy M z H oraz A z B i niech I będzie punktem przecięcia się prostych AB , KD . Twierdzą najpierw, iż czworobok $AIHM$ jest równoleńłobkiem czyli że prosta AB jest równoleńłą do MH .

Ponieważ $\sphericalangle HDM = \sphericalangle MFH = \delta$,
zatem czworobok $MFDH$ jest wpisany, musi tedy zachodzić równość

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2.$$

Trójkąty $\triangle MFD$ i $\triangle MAC$ równają się sobie (dlaczego?);

zatem

$$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3,$$

ale wiemy, iż

$$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4 \text{ (§ 143 i 144),}$$

wobec zaś równoległości prostych EH , AM musi być

$$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 5.$$

Tak więc $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 5$ i proste Al , MH są istotnie równoległe do siebie.

Jeżeli jeszcze zauważymy, iż

$$\triangle GIH \equiv \triangle ABM \quad (\text{dlaczego?}),$$

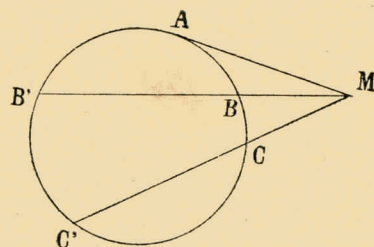
to dowód twierdzenia stanie się oczywisty.

Jakoż

$$\text{kwadrat } AEFM = AGHM = BIHM = MBKD.$$

§ 196. Twierdzenie. Jeżeli dwie sieczne wychodzą z jednego punktu, leżącego zewnątrz koła, wówczas prostokąt, zbudowany z jednej siecznej i z jej odcinka zewnętrznego, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z drugiej siecznej i z jej odcinka zewnętrznego.

Niech będzie dane koło i punkt zewnętrzny M . Jeżeli z M poprowadzimy dwie sieczne, z których pierwsza przecina okrąg w punktach B, B' , druga w punktach C, C' , wówczas powiadam, iż musi być



Rys. 166.

$$\boxed{MB, MB'} = \boxed{MC, MC'}.$$

Jakoż wystarczy zauważyć, że oba te prostokąty są równoważne kwadratowi, zbudowanemu na stycznej MA .

§ 197. Twierdzenie. Dwie sieczne, przecinające się wewnątrz koła, dzielą się każda w punkcie przecięcia na takie dwa odcinki, iż prostokąt, zbudowany z odcinków jednej siecznej, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z odcinków drugiej siecznej.

Twierdzenie to da się z łatwością sprowadzić do poprzedniego. Niech CC' , BB' będą dwiema cięciwami, przecinającymi się wewnątrz koła w punkcie M . Powiadam, iż mamy

$$\boxed{MB, MB'} = \boxed{MC, MC'}.$$

Aby tego dowieść, odłóżmy na cięciwach odcinki

$$MB'' = MB' \text{ i } MC'' = MC'.$$

Proste $B'C'$ i $B''C''$ są do siebie równoległe (dlaczego?), zatem

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2,$$

ale ponieważ kąty wpisane $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 3$ opierają się na tym samym łuku, zatem

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3 = \sphericalangle 2$$

i, co za tym idzie, kąt $\sphericalangle 3$ spełnia się z kątem $\sphericalangle 4$.

Stąd wynika, że na czworoboku $BB''C'C$ można opisać koło. Punkt M musi leżeć zewnątrz tego koła; mamy tedy koło (na rysunku kropkowane), punkt zewnętrzny M i dwie sieczne $MB''B$, $MC''C$, na mocy więc poprzedniego twierdzenia musi być:

$$\boxed{MB, MB''} = \boxed{MC, MC''}$$

że zaś

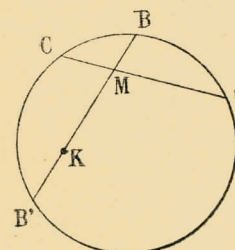
$$MB'' = MB', \quad MC'' = MC'$$

zatem

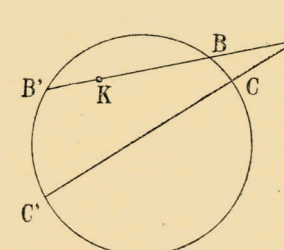
$$\boxed{MB, MB'} = \boxed{MC, MC'}.$$

§ 198. Jeżeli mamy dane koło i dwie sieczne, wychodzące z punktu (wewnętrznego lub zewnętrznego) M i przecinające okrąg: jedna w punktach B, B' , druga w punktach C, C' ; i jeżeli na jednej z nich, np. na pierwszej, obierzemy dowolny punkt K nie leżący na okręgu, wówczas prostokąt

$$\boxed{MC, MC'}$$
 nie jest równoważny prostokątowi $\boxed{MB, MK}$,



Rys. 168.



Rys. 169.

gdyż prostokąt

$$\boxed{MB, MK}$$

nie może być równoważny prostokątowi

$$\boxed{MB, MB'}$$

Widzimy tedy, iż twierdzenia przeciwne, (a więc i twierdzenie odwrotne) względem twierdzeń §§ 196, 197 muszą być prawdziwe. Innymi słowy mamy następujące

Twierdzenia odwrotne. I. Jeżeli na dwóch prostych, wychodzących z punktu M , mamy po dwa odcinki o jednakowych zwrotach MB, MB' oraz MC, MC' takie, iż

$$\boxed{MB, MB'} = \boxed{MC, MC'}$$

wówczas cztery punkty B, B', C, C' leżą na jednym okręgu (rys. 169).

II. Jeżeli na dwóch prostych, wychodzących z punktu M , mamy po dwa odcinki o zwrotach przeciwnych MB, MB' oraz MC, MC' , przyczym

$$\boxed{MB, MB'} = \boxed{MC, MC'}$$

wówczas cztery punkty B, B', C, C' leżą na jednym okręgu (rys. 168).

Mamy tedy nowy sposób poznawania, czy cztery punkty leżą czy nie leżą na tym samym okręgu.

Ćwiczenia XXX. Twierdzeń rozdziału III dowiedliśmy, nie uciekając się nigdzie do tych prawd geometrycznych, o których była mowa w rozdziale II, a więc do tw. Pitagorasa i do pokrewnych mu twierdzeń o trójkątach. Można z łatwością wykazać, że wszystkie własności trójkątów, zawarte w twierdzeniu Pitagorasa i w innych twierdzeniach rozdziału II, są po prostu wnioskami z prawd, które wyłożyliśmy w rozdziale niniejszym. Taki jest właśnie sens zadań 1—3.

1. Niech będzie dany trójkąt ostrokątny $\triangle ABC$. Na AB , jako na średnicy, kreślimy okrąg, który przechodzi przez spodki obu wysokości h_a, h_b (dlaczego?); zapomocą tej figury i twierdzenia § 196 dowiść, że prostokąt z boku trójkąta i rzutu na niego drugiego boku jest równoważny prostokątowi z tego drugiego boku i z rzutu na niego boku pierwszego (§ 188).

1a. Dowiść tego samego twierdzenia w przypadku, gdy w trójkącie $\triangle ABC$ kąt $\angle C$ jest rozwarty.

1b. Niech będzie dany trójkąt $\triangle ABC$, w którym kąt $\angle C = \delta$. Prowadzimy w nim wysokość CD i na AC , jako na średnicy, kreślimy koło. Za pomocą tej figury i twierdzenia § 195 dowiść, że kwadrat przyprostokątnej jest równoważny prostokątowi z całej przeciwprostokątnej i z rzutu tej przyprostokątnej (§ 189).

2. Na przyprostokątnych CA, CB , jako na średnicach, wykreślić dwa koła i, stosując do każdego z nich twierdzenie § 195, dowiść twierdzenia Pitagorasa.

2a. Dowiść twierdzenia Pitagorasa w następujący sposób: mając dany trójkąt $\triangle ABC$, w którym $\angle C = \delta$, kreślimy koło $(B)C$, które przecina przeciwprostokątną AB w punkcie D , przedłużenie zaś jej w punkcie E ; stosujemy do tej figury twierdzenie § 195, uwzględniając, że $AD = AB - BC$, $AE = AB + BC$.

3. Mając dany trójkąt $\triangle ABC$, w którym $\angle C = \delta$, kreślimy koło $(B)C$ i z punktu A prowadzimy do niego drugą styczną AC' . Łącząc C z C' i stosując twierdzenie § 197, dowiść, że kwadrat wysokości w trójkącie prostokątnym jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z odcinków, wyznaczonych na przeciwprostokątnej.

4. W trójkącie ostrokątnym ortocentr dzieli każdą wysokość na takie dwa odcinki, że zbudowane z nich prostokąty są sobie równoważne.

5. Czy twierdzenie to pozostaje prawdziwe dla trójkątów rozwartokątnych? Jeżeli nie, to jak należy je w tym wypadku zmodyfikować?

6. Jeżeli dwa koła przecinają się, wówczas przedłużenie ich wspólnej cięciwy dzieli na połowy wspólną ich styczną zewnętrzną.

7. Jeżeli AB jest wspólną cięciwą dwóch przecinających się kół i jeżeli przez dowolny punkt C tej cięciwy poprowadzimy dwie nowe cięciwy: jedną DCD' w pierwszym kole, drugą ECE' w drugim kole, wówczas punkty D, D', E, E' muszą leżeć na jednym okręgu koła.

8. Jeżeli trójkąty $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ mają kąty odpowiednio równe, wówczas prostokąt $\boxed{a, b'}$ jest równoważny prostokątowi $\boxed{a', b}$ [Wskazówka: budujemy kąt wierzchołkowy względem kąta $\angle C$ i na jego ramionach odkładamy odcinki, równające się bokom a', b' trójkąta $\triangle A'B'C'$].

9. Prostokąt, zbudowany z dwóch boków trójkąta, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z średnicy koła opisanego i z wysokości, poprowadzonej do boku trzeciego. [Wskazówka: chcąc dowiść, że $\boxed{a, b} = \boxed{h_c, 2R}$, prowadzimy wysokość CD , średnicę CE , łączymy A z E i stosujemy poprzednie ćwiczenie].

10. Jeżeli AB jest średnicą koła, punkt C leży na okręgu, O jest środkiem koła i jeżeli cięciwa CD jest prostopadła do średnicy AB , wówczas musi być $\boxed{AC, CB} = \boxed{CO, CD}$. [Wskazówka: połączyć D z B i oprzeć się na ćwiczeniu 8-ym].

11. Jeżeli w trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$ obierzemy dowolny punkt D na przeciwprostokątnej AB i w punkcie tym wystawimy prostopadłą, przecinającą przyprostokątne (lub ich przedłużenia) w punktach E, F , okrąg zaś koła opisanego w punkcie G , wówczas musi być $\boxed{DG} = \boxed{DE, DF}$. [Wskazówka: oprzeć się na zadaniu 8-ym].

12. Jeżeli AB jest średnicą koła, CD zaś dowolną cięciwą, prostopadłą do średnicy w punkcie M i jeżeli prosta AX , łącząca A z dowol-

nym punktem X cięciwy CD , przecina okrąg koła w punkcie Y , wówczas prostokąt $\boxed{AX, AY}$ ma stałą wielkość. [Wskazówka: czworobok $MX YB$].

13. Na prostej mamy trzy stałe punkty A, B, C . Z punktu A prowadzimy styczne do wszystkich kół, przechodzących przez punkty B i C ; znaleźć miejsce geometryczne punktów styczności tych stycznych.

14. Kreślimy układ kół, złożony z wszelkich możliwych kół, leżących po jednej stronie danej prostej m i stycznych do niej w danym jej punkcie A . Do kół tych prowadzimy styczne, równoległe do innej prostej danej p . 1) Znaleźć miejsce geometryczne punktów styczności. 2) Wykazać, że jeśli jedna z tych stycznych przecina prostą m w punkcie T , sama zaś jest przecięta przez inne koło tego samego układu w punktach B, C , wówczas prostokąt $\boxed{TB, TC}$ ma stałą wielkość.

15. Jeżeli mamy dane dwa koła O, O' i ze środka każdego z nich poprowadziliśmy styczną do drugiego koła, wówczas dwie styczne $OT', O'T$, leżące po jednej stronie linii środków, przecinają się w takim punkcie K , że $\boxed{KO, KT'} = \boxed{KT, KO'}$.

16. Jeżeli dwa koła przecinają się w punktach A, A' , wówczas styczne, poprowadzone do tych kół z dowolnego punktu prostej AA' , równają się sobie.

Jaką postać przybiera twierdzenie, jeżeli koła są zewnętrźnie styczne?

17. Dwa koła są zewnętrźnie styczne do siebie w punkcie A . W punkcie tym prowadzimy do nich wspólną styczną, na niej obieramy dowolny punkt X i łączymy X ze środkami kół. Niech B, B' , oraz C, C' będą punktami przecięcia się tych prostych z kołami; dowieść, że na czworoboku $BB'C'C$ można opisać koło.

18. Jeżeli CA, CB są dwiema stycznymi do koła i jeżeli z dowolnego punktu D na łuku AB poprowadzimy równoległe do stycznych, mianowicie $DE \parallel CA, DF \parallel CB$, przecinające cięciwę AB w punktach E, F , wówczas $\boxed{DE} = \boxed{DF} = \boxed{AF, FB}$. [Wskazówka: ćwiczenie 8-e].

19. Jeżeli na średnicy AB obierzemy punkty D, E tak, żeby było $\boxed{AE} = \boxed{AD, AB}$, i jeżeli na AD i na AE , jako na średnicach, wykreślimy półkoła, a w punkcie D wystawimy prostopadłą do średnicy, przecinającą koło dane w F , koło zaś wykreślone na AE w punkcie G , wówczas musi być $\boxed{AG} = \boxed{AF, AD}$.

20. Dane jest koło o średnicy AB ; w punkcie B prowadzimy do niego styczną, na niej obieramy dowolny punkt C , kreślimy koło

(C) B , wreszcie kreślimy prostą AC , która przecina to drugie koło w punktach D, E . Jeżeli koło (A) E przecina styczną CB w punkcie F , wówczas koło, zakreślone na średnicy AB , dzieli na połowy odcinek AF .

21. Opierając się na § 195, podać nowy sposób zbudowania kwadratu, równoważnego danemu prostokątowi. (Porówn. ćwiczenia XXIX, str. 174).

22. Dany kwadrat przekształcić w równoważny prostokąt o danym boku. Rozwiązać to zadanie: 1) za pomocą równoległoboków dopełniających; 2) opierając się na § 188; 3) opierając się na § 194; 4) opierając się na § 195.

23. W dane koło wpisać prostokąt, równoważny danemu kwadratowi.

24. Dany kwadrat przekształcić w prostokąt, w którym suma dwu boków sąsiednich $a + b$ jest dana.

25. Kwadrat przekształcić w równoważny prostokąt, w którym dana jest różnica dwu boków sąsiednich $a - b$.

26. Dane jest koło i punkt zewnętrzny A ; poprowadzić z punktu A sieczną tak, by okrąg koła podzielił ją na połowy.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$ równoważny danemu kwadratowi, mając dane:

$$27. A, c + h_c, \quad 28. A, c - h_c, \quad 29. c - h_c, r_a.$$

$$30. s_c, c + h_c, \quad 31. c - h_c, C, \quad 32. c + h_c, h_a.$$

33. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane prostokąt, równoważny prostokątowi $\boxed{a, b}$ oraz podstawę c i wysokość h_c .

[Wskazówka: porówn. ćwiczenie 9-te].

34. Wykreślić koło, przechodzące przez punkty A, B i styczne do danej prostej m .

35. Zbudować koło, styczne do dwóch danych prostych m, n i przechodzące przez dany punkt A . [Wskazówka: budujemy punkt A' , symetryczny z A względem dwusiecznej kąta $\angle(m, n)$ i przedłużamy AA' aż do przecięcia się z c . Jak postąpić, jeżeli $m \parallel n$?].

36. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane punkty A', B' , w których koło wpisane dotyka boków a, b , oraz prostą, na której leży bok c .

37. Wykreślić koło, przechodzące przez dwa dane punkty A, B i styczne do danego koła (O) r .

38. Dane są trzy punkty A, B, C ; wykreślić koło, przechodzące przez A i B , przytym takie, żeby styczna, poprowadzona z punktu C , równała się danemu odcinkowi m .

39. Przez dwa dane punkty A, B poprowadzić koło, przecinające dane koło (O) r według średnicy (t. j. tak, że odcinek, łączący punkty przecięcia, jest średnicą koła danego). [Wskazówka do

analizy: punkt A łączymy z O i przedłużamy aż do przecięcia z kołem, które mamy zbudować].

40. Dany jest kąt $\sphericalangle BAC$ i punkt D , nie leżący na jego ramionach. Przez D poprowadzić prostą, przecinającą ramiona kąta w takich punktach E, F , żeby prostokąt $[DE, DF]$ był równoważny danemu prostokątowi. [Wskazówka do analizy: jeżeli na prostej AD obierzemy taki punkt G , żeby było $[DA, DG] = [DE, DF]$ wówczas musi być $\sphericalangle DEG = \sphericalangle CAD$].

41. Zbudować trójkąt prostokątny $\triangle ABC$, mając daną przyprostokątną a , oraz rzut r_b . [Wskazówka do analizy: na r_b , jako na średnicy, kreślimy koło i z wierzchołka B prowadzimy styczną].

KSIĘGA III.

O figurach jednokładnych i podobnych.

ROZDZIAŁ I.

O proporcjach między odcinkami.

§ 199. Niech będą dane dwie wielkości zmienne A i B . Przypuśćmy, że gdy pierwsza przybiera wartości liczebne

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

druga przybiera odpowiednio wartości

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots,$$

Jeżeli zachodzą przytym równości

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \dots,$$

wówczas A i B nazywamy wielkościami *wprost proporcjonalnymi*,

jeżeli zaś mamy

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = \dots = a_n b_n = \dots,$$

wówczas A i B nazywamy wielkościami *odwrotnie proporcjonalnymi*.

W pierwszym przypadku możemy napisać

$$\frac{a_n}{b_n} = k,$$

gdzie k jest liczbą stałą i nazywa się *spółczynnikiem prostej proporcjonalności*.

W drugim zaś przypadku mamy analogicznie

$$a_n b_n = m,$$

przyczem liczba stała m nazywa się *spółczynnikiem proporcjonalności odwrotnej*.

Rzecz oczywista, że zarówno w pierwszym, jak i w drugim przypadku, *każde dwie pary odpowiadających sobie wartości tworzą proporcję*. Mamy więc np.

w przypadku proporcjonalności prostej

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_n}{b_n} \quad \text{czyli} \quad \frac{a_1}{a_n} = \frac{b_1}{b_n},$$

w przypadku zaś proporcjonalności odwrotnej

$$\frac{a_1}{a_n} = \frac{b_n}{b_1}.$$

§ 200. Wszystko to są rzeczy dobrze znane z arytmetyki elementarnej, jeżeli jednak zechcemy zastosować powyższe pojęcia do wielkości geometrycznych (a więc do odcinków, kątów i obszarów wielokątowych*), natrafimy na poważną trudność. W zagadnieniach, z którymi mieliśmy do czynienia w arytmetyce, zakładaliśmy zawsze, że liczby

$$\begin{array}{l} a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \\ b_1, b_2, \dots, b_n, \dots \end{array}$$

są liczbami całkowitymi lub ułamkowymi. Innymi słowami, zakładaliśmy, że wielkości A i B zmieniają się zawsze w taki sposób, iż dwa stany tej samej wielkości, np. stany A_k i A_n mają *zawsze wspólną miarę*.

Jeżeli np. kupujemy wstążkę jedwabną, płacąc po Fr. $6\frac{1}{2}$ za 1 metr, wówczas każde dwa kawałki wstążki (t. j. każde dwa stany wielkości A) mają wspólną miarę, którą jest metr lub centymetr, każde zaś dwie ceny (t. j. dwa odpowiednie stany wielkości B) mają wspólną miarę, którą jest frank.

Otóż przekonamy się zaraz, że istnieją wielkości geometryczne, nie mające żadnej wspólnej miary; nazywamy je *wielkościami niespółmiernymi*.

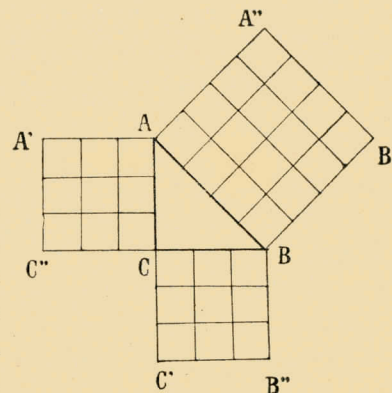
§ 201. Twierdzenie. W trójkącie prostokątnym równoramiennym przyprostokątna jest niespółmierna z przeciwprostokątną

*) I wogóle do wielkości ciągłych.

Zastosujmy metodę sprowadzenia do sprzeczności, t. j. przypuśćmy, iż boki tego trójkąta mają wspólną miarę, że mianowicie istnieje odcinek, który mieści się n razy w przyprostokątnej i p razy w przeciwprostokątnej.

Zbudujmy na bokach trójkąta kwadraty, następnie odłóżmy na bokach tych kwadratów ich wspólną miarę i połączmy przeciwległe punkty podziału.

Kwadraty $ACC''A'$ oraz $CC'B''B$ zostały podzielone każdy na n^2 równych sobie kwadracików; w kwadracie $AA'B'B$ zawiera się p^2 takich samych kwadracików. (Na rys. 170 mamy $n=3$, $p=4$).



Rys. 170.

Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, iż

$$[AC] + [CB] = [AB],$$

zastępując zaś te kwadraty przez małe kwadraciki, otrzymujemy równość arytmetyczną

$$2n^2 = p^2,$$

w której n i p są liczbami całkowitymi.

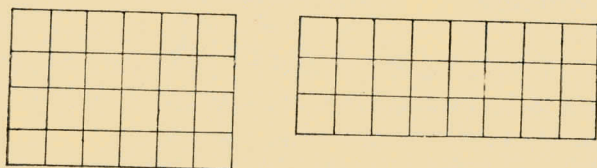
Otóż równość ta jest niedorzeczna. Istotnie, jeżeli n jest liczbą parzystą, to n^2 zawiera czynnik 2 parzystą liczbę razy; jeżeli zaś n jest nieparzyste, to n^2 nie zawiera wcale czynnika 2. To samo powtórzyć można o liczbach p i p^2 . Wobec tego lewa część powyższej równości czyli $2n^2$ zawiera czynnik 2 nieparzystą liczbę razy, natomiast p^2 albo wcale nie zawiera dwójki, albo zawiera ją parzystą liczbę razy.

Tak więc przypuszczenie nasze, że boki AC i AB mają wspólną miarę, było mylne.*)

*) Według tradycji, Pitagoras pierwszy dowiódł istnienia odcinków niespółmiernych. W każdym razie możemy z całą pewnością twierdzić, że fakt ten znany był uczniom i następcom Pitagorasa. Podany przez nas dowód jest właśnie oryginalnym dowodem pitagorejczyków; przytacza go w jednym z swych dzieł Arystoteles.

§ 202. Chcąc ustalić określenie odcinków proporcjonalnych, musimy poszukać takiej ich własności, która byłaby zupełnie niezależna od tego, czy dane odcinki są czy nie są współmierne.

W tym celu możemy oprzeć się na następującym spostrzeżeniu. Niech będą dane cztery odcinki spółmierne, których miary tworzą proporcję, np. odcinki o długości 4 cm., 8 cm., 3 cm. i 6 cm. Mamy proporcję $\frac{4}{8} = \frac{3}{6}$. Zbudujmy dwa prostokąty: bokami jednego niech będą odcinki o długości 4 cm. i 6 cm., bokami zaś drugiego odcinki o długości 3 cm. i 8 cm. Jeżeli na każdym boku odłożymy wspólną ich jednostkę miary, mianowicie 1 cm., i przeciwległe punkty podziału połączymy prostymi, wówczas oba prostokąty zostaną podzielone na jednakową liczbę (24) równych kwadratów; mówimy tedy, iż prostokąty te są sobie równoważne.



Rys. 171.

W poprzednich rozdziałach zbudowaliśmy teorię wielokątów równoważnych zupełnie niezależnie od istnienia lub nieistnienia odcinków niespółmiernych, wobec czego powyższe spostrzeżenia nasuwają nam pomysł następującego określenia:

§ 203. Określenie. Jeżeli cztery odcinki a, b, c, d dane są w porządku wymienionym i jeżeli prostokąt, zbudowany z odcinków a i d , jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z odcinków b i c , wówczas powiadamy, iż odcinki te tworzą proporcję i piszemy

$$a : b = c : d.$$

Uwaga. Jest rzeczą jasną, że niewolno z góry bez dowodu przypisywać powyższej proporcji żadnych własności, które posiadają proporcje, zachodzące między liczbami.

Wypadnie tedy zająć się zagadnieniem, czy to, co nazwalimy proporcją między odcinkami, posiada te same własności, które przysługują proporcjom między liczbami (wymiernymi).

§ 204. Twierdzenie. W każdej proporcji, zachodzącej między odcinkami, mamy prawo:

1-o przestawić wyrazy środkowe;

2-o przestawić wyrazy skrajne;

3-o środkowe uczynić skrajnymi, i odwrotnie.

Innymi słowy, jeżeli mamy proporcję

$$a : b = c : d$$

wówczas muszą również zachodzić następujące proporcje:

1-o $a : c = b : d$

2-o $d : b = c : a$

$$d : c = b : a$$

3-o $b : a = d : c$

$$b : d = a : c$$

$$c : a = d : b$$

$$c : d = a : b$$

Twierdzenie to wynika bezpośrednio z określenia § 203; istotnie, każda z tych proporcji powiada to samo, co i proporcja dana, mianowicie, iż

$$\boxed{a \quad d} = \boxed{b \quad c}.$$

§ 205. Twierdzenie. Jeżeli cztery odcinki a, b, c, d tworzą proporcję

$$a : b = c : d,$$

wówczas prawdziwe są również proporcje

(1) $na : b = nc : d$

(2) $a : nb = c : nd,$

w których n oznacza liczbę całkowitą lub ułamkową.

Istotnie, jeżeli mamy dane dwa prostokąty równoważne

$$\boxed{a, d} = \boxed{b, c},$$

wówczas muszą być równoważne prostokąty n razy większe lub mniejsze*), czyli musi być

*) Uczeń powinien zilustrować to za pomocą rysunku, kładąc np. $n = 3$.

zarówno

$$\boxed{na, d} = \boxed{nb, c},$$

jak

$$\boxed{a, nd} = \boxed{b, nc}.$$

§ 206. **Twierdzenie.** Jeżeli cztery odcinki a, b, c, d tworzą proporcję

$$a : b = c : d,$$

wówczas prawdziwe są również proporcje

$$(1) \quad (a+b) : b = (c+d) : d,$$

$$(2) \quad (a-b) : b = (c-d) : d.$$

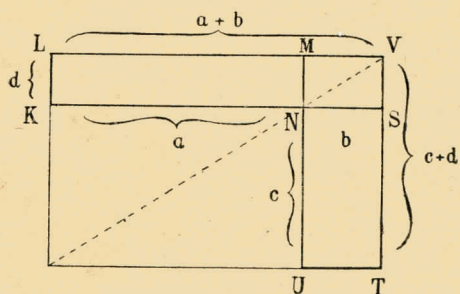
Jeżeli mamy daną proporcję $a : b = c : d$, wówczas musi być

$$\boxed{a, d} = \boxed{b, c}.$$

(1) Zbudujmy (rys. 172) dwa równoważne prostokąty

$$KLMN = NSTU,$$

przyczym $LM=a$, $MV=NS=b$, $ST=NU=c$, $VS=d$.



Rys. 172.

Z równoważności tych dwu prostokątów wynika, że muszą być równoważne dwa inne prostokąty

$$LKSV = MVTU$$

czyli

$$\boxed{a+b, d} = \boxed{b, c+d}$$

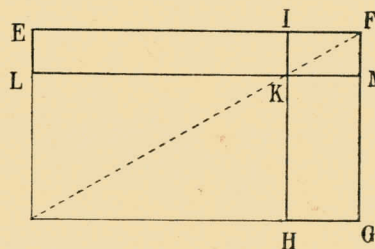
lub, co na jedno wychodzi,

$$(a+b) : b = (c+d) : d.$$

(2) Zbudujmy dwa równoważne prostokąty (rys. 173)

$$ELMF = IFGH,$$

i niech będzie $EF=a$, $IF=b$, $FG=c$, $FM=d$.



Rys. 173.

Mamy wówczas dwa inne prostokąty równoważne, mianowicie

$$ELKI = KMGH$$

czyli

$$\boxed{a-b, d} = \boxed{c-d, b}$$

lub, co na jedno wychodzi,

$$(a-b) : b = (c-d) : d.$$

§ 207. **Twierdzenie.** Z prawdziwości dwóch proporcji

$$a : b = c : d$$

$$e : f = c : d$$

wynika prawdziwość proporcji

$$a : b = e : f.$$

Innymi słowami: jeżeli mamy dwie pary prostokątów równoważnych

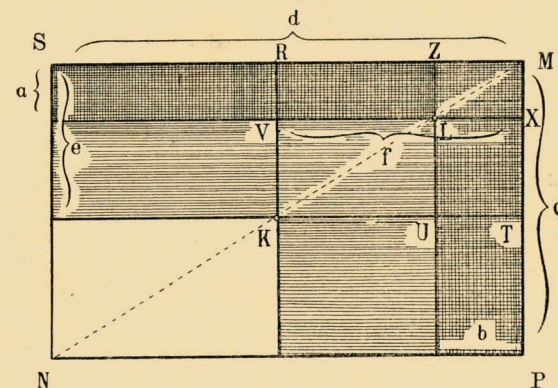
$$\boxed{a, d} = \boxed{b, c}$$

$$\boxed{e, d} = \boxed{f, c},$$

wówczas muszą być równoważne dwa inne prostokąty, mianowicie

$$\boxed{a, f} = \boxed{b, e}.$$

Jakoż z równoważności pierwszych dwu prostokątów wynika, że punkt L leży na przekątnej MN prostokąta $MPNS$ (rys. 174); z równoważności drugich dwu prostokątów wy-



Rys. 174.

nika, że punkt K leży na tej samej przekątnej tego samego prostokąta. Wobec tego prostokąty $VRMX$, $ZMTU$ muszą być równoważne sobie, a są to właśnie prostokąty żądane, mianowicie

$$VRMX \text{ jest to prostokąt } \boxed{a, f}$$

$$ZMTU \text{ „ „ „ } \boxed{b, e}.$$

§ 208. **Określenie.** Odcinek d nazywamy czwartym proporcjonalnym do odcinków a, b, c , jeżeli zachodzi proporcja

$$a : b = c : d.$$

§ 209. Ponieważ na danym boku a można zbudować tylko jeden prostokąt równoważny prostokątowi danemu b, c , mamy więc bardzo ważne twierdzenie następujące:

Twierdzenie. *Istnieje jeden tylko odcinek, czwarty proporcjonalny do trzech danych.*

§ 209a. Określenie. Jeżeli mamy dane takie trzy odcinki a, b, c , iż $a : b = b : c$ (czyli że kwadrat odcinka b jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z a i c), wówczas odcinek b nazywamy średnim proporcjonalnym między odcinkami a i c .

Ćwiczenia XXXI. Z dwóch proporcji $a : b = b' : c'$, oraz $b : c = b' : c'$ wynika słuszność proporcji $a : c = a' : c'$.

2. Dowieść twierdzenia § 207, budując równoważne prostokąty $d, e = c, f$ nazewnątrz prostokąta $SMPN$.

3. Na rysunku, odnoszącym się do poprzedniego zadania, dowieść, że jeśli mamy dane dwie proporcje

$$\begin{aligned} a : b &= c : d, \\ e : f &= c : d, \end{aligned}$$

wówczas muszą być prawdziwie następujące proporcje:

- (1) $(a + e) : c = (b + f) : d$;
- (2) $(c + e) : e = (d + f) : f$;
- (3) $(a + e) : (b + f) = (c + e) : (d + f)$.

4. Zbudować odcinek czwarty proporcjonalny do trzech danych odcinków a, b, c .

5. Opierając się na twierdzeniu § 206 dowieść, iż z proporcji $a : b = c : d$ wynika proporcja $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$.

6. Rozwiązać poprzednie zadanie niezależnie od tw. § 206, mianowicie wzorując się na dowodach § 207.

7. Trzema różnymi sposobami zbudować odcinek x , średni proporcjonalny między dwoma danymi odcinkami a, b .

ROZDZIAŁ II.

Twierdzenie Talesa i wnioski z niego.

§ 210. W rozdziale poprzednim ustaliliśmy określenie odcinków proporcjonalnych. Opierając się na tym określeniu, łatwo jest wykazać, że jeżeli ramiona kąta prostego przetniemy dowolnymi równoległymi, otrzymamy na tych ramionach odcinki proporcjonalne.

Istotnie, jeżeli (rys. 175) AB, CD są to dwie równoległe, przecinające ramiona kąta prostego $\angle O$, wówczas CD jest przekątną prostokąta $OCKD$, odcinek zaś AB jest przekątną prostokąta $OAXB$, którego trzy wierzchołki O, A, B są dane, czwarty zaś wierzchołek X leży na przekątnej OK prostokąta $OCKD$ (Ćwiczenie XXVII, 4, str. 165). Wobec tego musi być

$$\boxed{OB} \boxed{OC} = \boxed{OA} \boxed{OD},$$

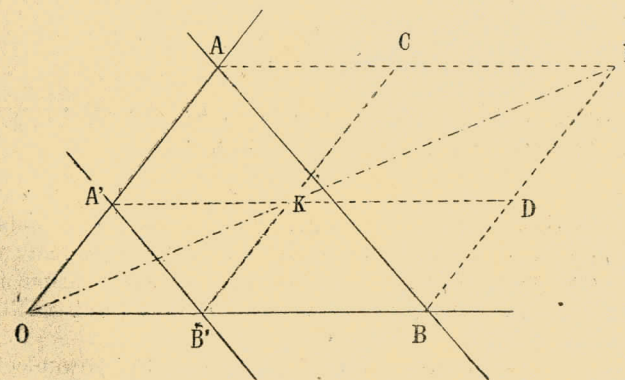
co możemy napisać w postaci proporcji

$$OA : OC = OB : OD.$$

Samo przez się nasuwa się pytanie, czy odcinki proporcjonalne powstają w tych warunkach tylko na ramionach kąta prostego, czy też znaleziona własność przysługuje każdemu kątowi, przeciętemu prostymi równoległymi.

Aby ułatwić sobie odpowiedź na to pytanie, dowiedzimy najpierw następującego twierdzenia pomocniczego.

§ 211. Twierdzenie pomocnicze. *Jeżeli dwa równoległoboki, mające równe kąty, są sobie równoważne, wówczas dwa prostokąty, zbudowane z tych samych boków co równoległoboki, są też równoważne sobie.*



Rys. 176.

Niech będą dane dwa równoważne równoległoki o równych kątach. Możemy je zawsze umieścić w takim położeniu wzajemnym, jak równoległoki $OACB'$, $OA'DB$ na rys. 176, t. j. tak, że wyznaczają one równoległok $OAEB$ i w nim dwa równoległoki dopełniające $A'ACK$, $B'KDB$. Wiemy już (ćwiczenie XXVII, 5), że proste $A'B'$, AB muszą być do siebie równoległe.

Powiadam teraz, iż musi być

$$|OA' \quad OB| = |OB' \quad OA|$$

W celu ustalenia tego faktu, odkładam (rys. 177) na prostej OA odcinek $OB'' = OB'$, na prostej zaś OB odcinek

$$OA'' = OA',$$

i postaram się dowieść równoważności dwóch prostokątów.

$$|OA, OB''| = |OB, OA''|.$$

Te dwa prostokąty byłyby niewątpliwie równoważne, gdyby figura $A''B''AB$ była czworobokiem wpisanym w koło (§ 196, str. 180). Łatwo przekonać się, że tak jest istotnie. Jakoż mamy

$$AB \parallel A'B', \text{ zatem } \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2.$$

Ponieważ mamy

$$\triangle OA'B' \equiv \triangle OA''B'' \quad (\text{dlaczego?}),$$

$$\text{zatem} \quad \sphericalangle 3 = \sphericalangle 2,$$

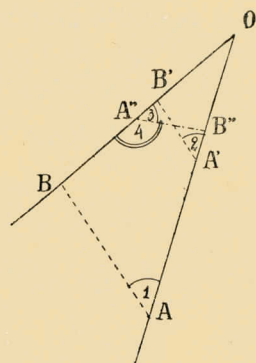
$$\text{czyli} \quad \sphericalangle 3 = \sphericalangle 1,$$

a stąd wynika, że kąt $\sphericalangle 1$ spełnia się z kątem $\sphericalangle 4$ czyli, że czworobok $A''B''AB$ jest wpisany w koło.*)

*) Twierdzenie to da się zilustrować w sposób następujący:

Zbudujmy równoległobok przegubowy $OAEB$ i umieścmy w nim dwa pręty $A'D$, $B'C$ tak, by końce ich były przytwierdzone na zawiasach do boków równoległoboku. Niech przytym pręty te ślizgają się po sobie w punkcie K (rys. 178).

Przypuśćmy, że pręty umieściliśmy tak, by równoległoboki $\triangle A'CB'$, $OA'DB$ były równoważne sobie przy pewnym określonym



Rys. 177

§ 212. Opierając się na powyższym spostrzeżeniu, możemy dowieść dwóch twierdzeń, które wraz ze swymi odwrotnymi stanowią podstawę całej teorii figur jednokładnych i podobnych.

Twierdzenie (zwane twierdzeniem Talesa). *Równoległe, przecinając ramiona kąta, wyznaczają na nich odcinki proporcjonalne.*

Oczywista rzecz, że wystarczy wziąć pod uwagę cztery odcinki, wyznaczone przez dwie dowolne równoległe, i dowieść, że te cztery odcinki tworzą proporcję.

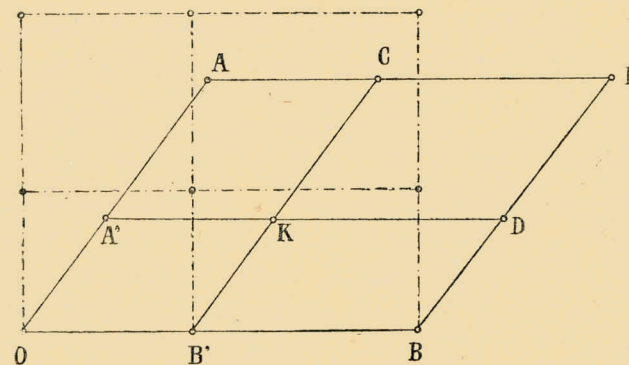
Niech będą dane dwie proste m , p , przecinające się w punkcie O , i niech AA' , BB' będą dwiema równoległymi, przecinającymi tamte dwie proste. Chcemy dowieść, że

$$OA : OB = OA' : OB',$$

czyli że

$$|OA \quad OB'| = |OB \quad OA'|$$

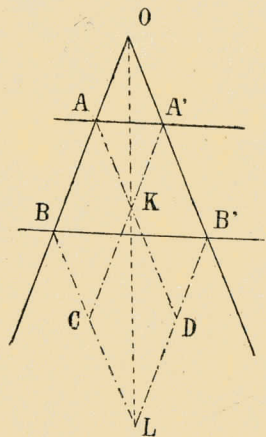
kącie $\sphericalangle AOB$; twierdzenie nasze oznacza właściwie, że pozostaną one równoważne sobie i wówczas, gdy kąt ten będziemy zmieniać, czyli gdy będziemy w dowolny sposób poruszać równoległobok $OAEB$.



Rys. 178.

Albo inaczej: jeżeli umieściliśmy pręty tak, że przy pewnym określonym kącie $\sphericalangle AOB$ punkty O , K , E znalazły się na jednej prostej, wówczas, jakkolwiek poruszać będziemy równoległobok $OAEB$, zawsze punkty O , K , E leżeć będą na jednej prostej.

Na mocy powyższego twierdzenia pomocniczego, wystarczy dowieść, że jeśli utworzymy dwa równoległoki o równych kątach, przyczem bokami jednego będą odcinki OA , OB' , bokami zaś drugiego odcinki OB , OA' , wówczas te dwa równoległoki muszą być równoważne sobie.

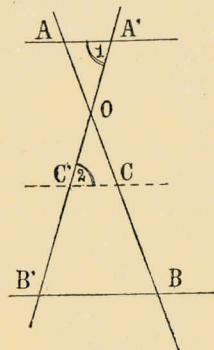


Rys. 179.

Tak jest istotnie. Przypuśćmy najpierw, że równoległe AA' , BB' leżą po jednej stronie punktu O , jak na rys. 179. Odcinki AA' , BB' , które są przekątnymi w równoległobokach $OAKA'$, $OBLB'$, są do siebie równoległe, a więc punkt K leży na przekątnej OL tego drugiego równoległoboku (ćwiczenie 4, str. 165). Wobec tego równoległoki $AKCB$, $A'KDB$, są dopełniające (§ 178, str. 158) i, co za tym idzie, równoległoki $OA'CB$, $OADB'$ są sobie równoważne, a tego właśnie należało dowieść.

Przypadek, w którym punkt O leży pomiędzy równoległymi AA' , BB' (rys. 179a), daje się sprowadzić do poprzedniego. W tym celu odkładamy na prostych m , p po drugiej stronie punktu O odcinki $OC=OA$, $OC'=OA'$. Wobec równości trójkątów $\triangle AOA' \equiv \triangle COC'$ musi być $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, zatem proste AA' , CC' są do siebie równoległe i mamy, jak w przypadku poprzednim,

$$\boxed{OC, OB'} = \boxed{OB, OC'}$$



Rys. 179a.

czyli

$$\boxed{OA, OB'} = \boxed{OB, OA'} \quad .*)$$

§ 213. Wniosek. Z powyższego twierdzenia wynika, że jeśli proste m , p (rys. 180) przetniemy równoległymi AA' , BB' , CC' , DD' ,, wówczas musi być

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D', \text{ i t. d.}$$

§ 214. Twierdzenie odwrotne (względem tw. Talesa).

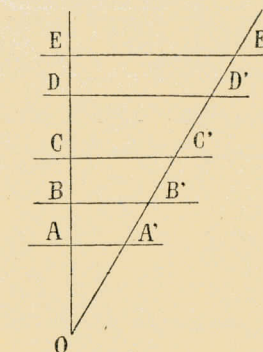
Jeżeli na ramionach kąta $\sphericalangle MOP$ mamy dane cztery odcinki, które tworzą proporcję:

$$OA : OB = OA' : OB',$$

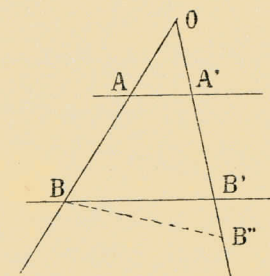
wówczas proste AA' , BB' są do siebie równoległe (rys. 181).

Dowodziemy tego twierdzenia dla przypadku, gdy punkty A , B , A' , B' leżą po jednej stronie punktu O .

Gdyby twierdzenie nie było prawdziwe, wówczas przez punkt B moglibyśmy poprowadzić równoległą do AA' , która byłaby różna od prostej BB' . Niech tą równoległą będzie prosta BB'' .

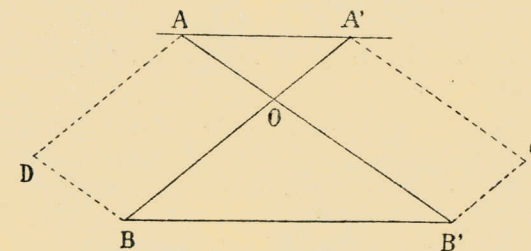


Rys. 180.



Rys. 181.

*) Jeszcze łatwiejszy byłby dowód bezpośredni, oparty na równoważności równoległoboków *wierzchołkowych* (ćwiczenie 7, str. 166) Dowód wynika od razu z rys. 182.



Rys. 182.

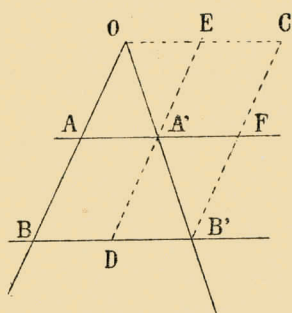
Na mocy twierdzenia Talesa, odcinki OA , OB , OA' , OB'' musiałyby tworzyć proporcję, ale w takim razie do trzech odcinków OA , OB , OA' istniałyby dwa odcinki czwarte proporcjonalne nierówne sobie: jeden OB' , drugi OB'' , a to jest niemożliwe (§ 209).

§ 215. Twierdzenie. Jeżeli ramiona kąta $\sphericalangle O$ zostały przecięte równoległymi AA' , BB' , wówczas zachodzi proporcja

$$OA : AA' = OB : BB'$$

czyli innymi słowami, mamy

$$\boxed{OA \quad BB'} = \boxed{OB \quad AA'}.$$



Rys. 183.

Przez punkty A' i B' wykreślmy równoległe do ramienia OA (rys. 183); otrzymamy równoległobok $BOCB'$, w którym odcinek OB' jest przekątną, wobec czego równoległoboki $OEDB$, $OAFB'$ mają odpowiednio równe kąty i są sobie równoważne. Pierwszy równoległobok zbudowany został z odcinków OB i AA' , drugi zaś z odcinków OA i BB' .

Na mocy twierdzenia § 211, dwa prostokąty, zbudowane z tych samych boków, muszą być równoważne sobie.

Ćwiczenia XXXII. 1. Opierając się na twierdzeniu § 212, str. 197, znaleźć nowy sposób budowania odcinka x , czwartego proporcjonalnego do trzech danych odcinków a , b , c .

2. Opierając się na § 212, podzielić dany odcinek AB na trzy części, proporcjonalne do trzech danych odcinków m , p , r .

Mając dane odcinki m , k , zbudować prostokąt $ABCD$, jeżeli prócz tego mamy dane:

3. bok a oraz warunek, że $a : b = m : k$;
4. „ a „ „ „ $a : e = m : k$;
5. „ a „ „ „ $b : e = m : k$;
6. przekątną e oraz warunek, że $a : b = m : k$;
7. sumę $a + b$ oraz warunek, że $a : b = m : k$;
8. „ $a + e$ „ „ „ $a : e = m : k$.

9. Zbudować romb $ABCD$, mając daną przekątną e i wiedząc, że musi być $e : f = m : k$, gdzie m i k są dwoma danymi odcinkami.

10. Zbudować romb $ABCD$, mając dany bok a , oraz warunek, że $a : h = m : k$, gdzie m i k oznaczają dwa dane odcinki.

11. Zbudować romb $ABCD$, mając daną sumę $e + f$ (lub różnicę $e - f$), oraz warunek, że $e : f = m : k$, gdzie m i k są dwoma danymi odcinkami.

12. Zbudować trójkąt równoramienny, mając dany bok a oraz warunek, że $c : l_c = m : k$, gdzie m i k są to dwa dane odcinki.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, jeżeli mamy dany warunek

$$r_a : r_b = m : k,$$

gdzie m i k są odcinkami danymi, i jeżeli prócz tego mamy dane:

- | | | |
|--|-------------------|--|
| 13. a , B . | 14. c , C . | 15. a , h_c . |
| 16. c , $\sphericalangle (s_c, h_c)$. | 17. c , s_c . | 18. c , $\sphericalangle (d_A, h_c)$. |

19. Zbudować trójkąt, mając daną sumę dwu jego boków $a + b$, oraz dwa następujące warunki:

$$a : b = p : r, \quad (a + b) : h_a = m : k,$$

gdzie p , r , m , k są to cztery dane odcinki.

20. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dany jego obwód, oraz warunki, że $a : b = m : k$, $b : c = k : p$.

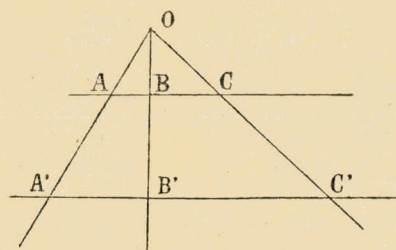
21. Wewnątrz koła $(O)r$ dany jest punkt A ; poprowadzić przez A taką cięciwę XY , żeby zachodziła proporcja $AX : AY = m : n$, gdzie m i n są to dwa dane odcinki. [Wskazówka do analizy: przez X prowadzimy równoległą do promienia YO , która przecina prostą OA w punkcie Z].

22. Na okręgu koła $(O)r$ dany jest punkt C ; wykreślić cięciwę CD , która przecinałaby daną cięciwę AB tegoż koła w takim punkcie X , żeby zachodziła proporcja $CX : XD = m : n$, gdzie m , n są odcinkami danymi. [Wskazówka do analizy: kreślimy $DY \parallel AB$].

23. Na okręgu koła dane są dwa punkty C , C' ; wykreślić cięciwę, równającą się danemu odcinkowi a i położoną w taki sposób, że jeśli z C i C' poprowadzimy do niej prostopadłe CX , $C'X'$, wówczas zachodzić będzie proporcja $CX : C'X' = m : n$, gdzie m , n są odcinkami danymi. [Wskazówka do analizy: proste CC' , XX' wrazie potrzeby przedłużamy aż do przecięcia się w punkcie Z ; czy położenie punktu Z daje się wyznaczyć?].

24. Opierając się na § 215, dowieść, że jeśli pęk prostych przetniemy dwiema równoległymi, otrzymamy na tych równoległych odcinki proporcjonalne.

25. Dowieść następującego twierdzenia: jeżeli trzy proste AA' , BB' , CC' wyznaczają na dwóch równoległych odcinki proporcjonalne (przyczym wszystkie odcinki na jednej równoległej mają ten sam zwrot



Rys. 184.

26. Na twierdzeniach, podanych w poprzednich ćwiczeniach, oprzeć nowy sposób podziału danego odcinka AB na części, proporcjonalne do danych odcinków $k, m, p, r, \dots$

28. Dane jest koło $(O)A$ i w nim cięciwa AB ; wykreślić cięciwę XY tak, by promienie OA, OB podzieliły ją na trzy równe części.

29. Dane jest koło $(O)A$ i w nim cięciwa AB ; wykreślić odcinek XY tak, by końce jego leżały na przedłużeniu promieni OA, OB i żeby okrąg koła $(O)A$ dzielił ten odcinek na trzy części równe.

30. Rozwiązać zadania 28 i 29 w założeniu, że odcinek XY ma być podzielony nie na trzy równe części, lecz na trzy części, proporcjonalne do trzech danych odcinków k, m, p .

Opierając się na tw. Talesa i na zadaniu 24, możemy rozwiązywać wykreślnie, t. j. za pomocą rysunku zadania na t. zw. podział proporcjonalny. Dla przykładu uczeń rozwiąże następujące zadanie:

31. Dany odcinek m podzielić na części, proporcjonalne do liczb 3, 7.

Rozwiązać geometrycznie (rozmaitymi sposobami) następujące równania i sprawdzić odpowiedź za pomocą rachunku, kładąc na a, b, c dowolne liczby wymierne:

$$\begin{array}{lll} 32. \quad 3:5=4:x. & 33. \quad a:b=c:x. & 34. \quad a:(a+b)=c:x \\ 35. \quad a:(a-b)=c:x. & 36. \quad ax=bc. & 37. \quad ax=b^2. \end{array}$$

38. W trójkącie $\triangle ABC$ obieramy dowolny punkt D na boku BC i prowadzimy odcinki $DE \parallel AC, DF \parallel AB$. Dowieść równoważności dwóch prostokątów:

$$[DE, DF] = [BE, CF]$$

39. W trójkącie równobocznym $\triangle ABC$ obieramy na boku BC taki punkt D , żeby było $BD = \frac{1}{4} BC$, poczym z punktu D kreślimy odcinek $DE \perp AB$. Obliczyć, w jakim stosunku punkt E podzielił bok AB .

co odpowiednie odcinki na drugiej, lub też odcinki na jednej równoległej mają zwroty przeciwne zwrotom odcinków na drugiej), wówczas proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie.

27. Dane są dwie proste m, n , których punkt przecięcia się O jest niedostępny; połączyć dany punkt A z O .

40. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy $a=15$ cm., $b=90$ cm. Z punktu D , w którym dwusieczna CD przecina bok trójkąta, kreślimy równoległe do boków AC i BC . Jakiego rodzaju czworobok powstaje przy tym? Obliczyć jego boki.

41. Obwód trójkąta $\triangle ABC$ równa się 32 cm. Przez środek wysokości h_a poprowadzono równoległą do boku a . Obliczyć obwody trapezu i trójkąta, na które równoległa podzieliła trójkąt $\triangle ABC$.

42. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy dane następujące odcinki: $a=18$ cm., $r_a=6$ cm., $r_b=4$ cm. Na jakie odcinki został podzielony bok a przez oś symetrii boku c ?

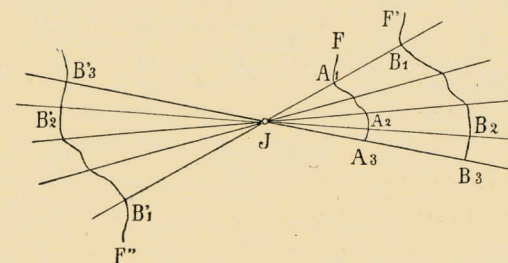
ROZDZIAŁ III.

O przekształceniu jednokładnym.

§ 216. Niech będą dane na płaszczyźnie figura F i punkt J . Wyobraźmy sobie, że wszystkie punkty $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ tej figury zostały połączone z punktem J i że na tych prostych odłożyliśmy odcinki $JB_1, JB_2, JB_3, \dots$, odpowiednio proporcjonalne do odcinków $JA_1, JA_2, JA_3, \dots$, tak iż mamy

$$\frac{JA_1}{JB_1} = \frac{JA_2}{JB_2} = \frac{JA_3}{JB_3} = \dots = \frac{m}{k},$$

gdzie m i k są to dwa dane odcinki, zresztą dowolnej wielkości.



Rys. 185.

Punkty $B_1, B_2, B_3, \dots$ tworzą nową figurę F' (rys. 185), którą nazywamy *jednokładną* z figurą pierwotną F względem *środką jednokładności* J .

Rzecz jasna, że odcinki proporcjonalne do JA_1 , JA_2 , JA_3 , moglibyśmy odłożyć w zwrocie przeciwnym, t. zn. tak, by środek jednokładności J leżał pomiędzy figurą pierwotną F a figurą przekształconą F'' . W celu odróżnienia tych dwu przypadków, powiadamy, że figury F i F' są *jednokładne wprost*, figury zaś F i F'' są *odwrotnie jednokładne*.

§ 217. Jeżeli mamy dany środek jednokładności J i dwa jakiekolwiek odcinki m , k , wówczas dla każdego punktu A figury F możemy znaleźć na prostej JA po jednej stronie punktu J jeden i tylko jeden punkt B taki, że zachodzi proporcja

$$\frac{JA}{JB} = \frac{m}{k} \dots \dots \dots (1).$$

Istotnie, odcinki JA , m , k są dane, zatem JB jest względem nich odcinkiem czwartym proporcjonalnym, a taki odcinek, jak wiemy (§ 209), istnieje zawsze tylko jeden.

Rzecz jasna, że na tej samej prostej istnieje po drugiej stronie punktu J taki punkt B' , symetryczny z punktem B , że mamy proporcję

$$\frac{JA}{JB'} = \frac{m}{k} \dots \dots \dots (2).$$

W ten sposób każdemu punktowi figury F odpowiada jeden i tylko jeden punkt figury F' (lub figury F''), jednokładnej z nią względem środka J .

Jeżeli postąpimy odwrotnie, t. j. na figurze F' obierzemy dowolny punkt B (lub na figurze F'' dowolny punkt B'), wówczas w proporcji (1) odcinek JA będzie czwartym proporcjonalnym do trzech danych odcinków JB , m , k (lub w proporcji (2) do trzech danych odcinków JB' , m , k), punkt więc A figury F jest w zupełności wyznaczony, skoro tylko mamy dane: środek jednokładności J , punkt B na figurze przekształconej F' (lub punkt B' na figurze F'') i dwa odcinki m , k , do których mają być proporcjonalne odcinki JA , JB (lub JA , JB').

Mamy tedy następujące określenie:

§ 218. **Określenie.** Dwie figury F , F' nazywamy *jednokładnymi*, jeżeli

1) *każdemu punktowi A jednej figury odpowiada punkt B drugiej figury;*

2) *jeżeli prosta AB przechodzi przez stały punkt J , zwany *środkiem jednokładności*;*

3) *jeżeli spełniona jest proporcja*

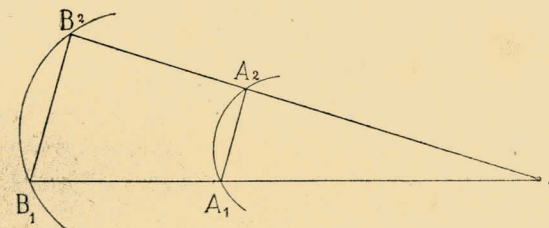
$$\frac{JA}{JB} = \frac{m}{k},$$

gdzie m i n są dwoma danymi odcinkami;

Jeżeli odcinki JA , JB mają ten sam zwrot, a więc figury F i F' leżą po tej samej stronie środka jednokładności J , wówczas mówimy o przekształceniu jednokładnym prostym. Jeżeli zaś odcinki JA , JB mają zwroty przeciwne, t. j. figury F , F' leżą po dwóch stronach środka jednokładności, wówczas przekształcenie jednokładne nazywamy *odwrotnym*.

Uwaga. Symetria względem punktu jest przypadkiem szczególnym jednokładności odwrotnej, gdy mianowicie $m = k$.

§ 221. **Twierdzenie.** Odcinek, łączący dwa dowolne punkty jednej figury, jest równoległy do odcinka, łączącego dwa odpowiadające im punkty drugiej figury, jednokładnej z pierwszą.



Rys. 186.

Jeżeli mamy dane dwie figury, jednokładne z sobą względem środka J i jeżeli punktom A_1 , A_2 pierwszej figury odpowiadają punkty B_1 , B_2 drugiej figury, wówczas powiadam, iż odcinek $A_1 A_2$ jest równoległy do odcinka $B_1 B_2$.

Istotnie, na mocy określenia jednokładności, punkty A_1 , B_1 leżą na prostej, przechodzącej przez środek jednokładności J , punkty zaś A_2 , B_2 leżą na drugiej prostej, przechodzącej przez ten sam punkt J . Z określenia jednokładności wynika również, iż

$$\frac{JA_1}{JB_1} = \frac{JA_2}{JB_2},$$

a z twierdzenia § 214 wiemy, iż w takim razie odcinki $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ są do siebie równoległe.

Uwaga. Z twierdzenia § 215 (str. 200) wynika, iż

$$\frac{A_1 A_2}{B_1 B_2} = \frac{JA_1}{JB_1} = \frac{m}{k}.$$

§ 220. Z tego podstawowego twierdzenia wynikają ważne wnioski.

Wnioski. 1. Przekształcając jednokładnie odcinek, otrzymujemy drugi, równoległy do niego odcinek.

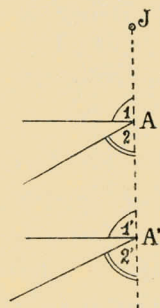
2. Przekształcając jednokładnie prostą, otrzymujemy drugą prostą, równoległą do danej.

3. Przekształcając jednokładnie kąt, otrzymujemy równy mu kąt.

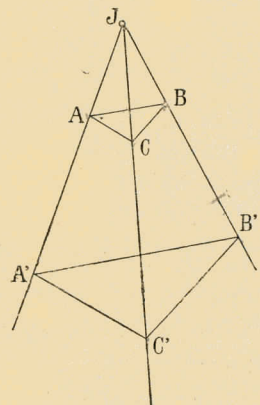
Dowód uczeń przeprowadzi sam, kierując się rysunkiem 187.

4. Przekształcając jednokładnie trójkąt, otrzymujemy znów trójkąt, mający te same kąty. Boki obu trójkątów są do siebie proporcjonalne.

Pierwsza część tego wniosku wynika z wniosków 1 i 3. Co się tyczy proporcjonalności boków, to mamy (rys. 188).



Rys. 187.



Rys. 188.

$$\frac{JA}{JA'} = \frac{AC}{A'C'}, \text{ oraz } \frac{JA}{JA'} = \frac{AB}{A'B'},$$

$$\text{zatem } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Stosując analogiczne rozumowanie do boków CB , $C'B'$, uczeń sam otrzyma związek

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CB}{C'B'}.$$

5. Jeżeli mamy dwa trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ położone w taki sposób, iż proste AA' , BB' , CC' , łączące ich wierzchołki, przecinają się w jednym punkcie J i jeżeli dwa boki AB , AC pierwszego trójkąta są równoległe do dwóch boków $A'B'$, $A'C'$ drugiego trójkąta, wówczas trzecie ich boki BC , $B'C'$ są też do siebie równoległe i trójkąty te są jednokładne.

Istotnie, na mocy § 212, str. 198 mamy (rys. 188)

$$JA : JA' = JB : JB', \text{ ponieważ } AB \parallel A'B';$$

$$JA : JA' = JC : JC', \quad ,, \quad AC \parallel A'C',$$

zatem musi być $JB : JB' = JC : JC'$,

a z § 214 (str. 199) wiemy, iż w takim razie proste BC , $B'C'$ są do siebie równoległe.

6. Odwrotnie: Jeżeli dwa trójkąty tak są położone, że wszystkie boki jednego z nich są równoległe do boków drugiego, wówczas proste, łączące odpowiadające sobie wierzchołki tych trójkątów, przechodzą wszystkie przez jeden punkt, o ile nie są do siebie równoległe. Punkt ten jest środkiem jednokładności trójkątów.

Jeżeli boki trójkąta $\triangle ABC$ są równoległe do boków trójkąta $\triangle A'B'C'$ i jeżeli proste AA' , CC' przecinają się w punkcie J , wówczas powiadam, że prosta BB' musi również przechodzić przez punkt J .

Jakoż przypuśćmy, że prosta JB nie przechodzi przez wierzchołek B' drugiego trójkąta, lecz że przecina bok jego $A'B'$ lub przedłużenie tego boku w jakimś punkcie B'' .

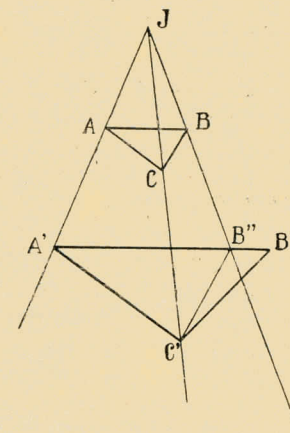
Ponieważ proste AA' , BB'' , CC' przechodzą przez jeden punkt J , boki zaś AB , AC trójkąta $\triangle ABC$ są równoległe do boków $A'C'$, $A'B''$ trójkąta $\triangle A'B''C'$, zatem, na mocy poprzedniego wniosku 5-go, trzecie boki tych trójkątów CB , $C'B''$ muszą być do siebie równoległe, co jest niedorzeczne, gdyż założyliśmy, że odcinki CB , CB' są równoległe.

7. Przekształcając jednokładnie okrąg koła, otrzymujemy drugi okrąg.

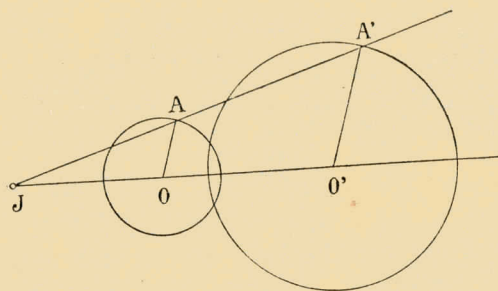
Przekształćmy koło $(O)A$ jednokładnie względem środka jednokładności J i niech punkt O przekształci się przytym w punkt O' .

Wszystkie promienie koła $(O)A$ muszą się przekształcić w odcinki równoległe, przechodzące przez punkt O' . Wszystkie te przekształcone odcinki są sobie równe, gdyż

$$JO : JO' = OA : O'A',$$



Rys. 189.



Rys. 190.

figury przekształconej są równoodległe od punktu stałego O' , figura więc jest okręgiem.

Ćwiczenia XXXII. 1. Odcinek AB przekształcić jednokładnie, mając dany środek jednokładności J i wiedząc, że dany punkt M' powinien leżeć na odcinku przekształconym.

2. Dany trójkąt $\triangle ABC$ przekształcić jednokładnie w trójkąt $\triangle A'B'C'$, mając dany środek jednokładności J i punkt M' na boku a' trójkąta przekształconego. Rozwiązać to zadanie przy czterech założeniach: 1) że J leży wewnątrz trójkąta $\triangle ABC$ i jest środkiem jednokładności prostej; 2) że J leży wewnątrz trójkąta $\triangle ABC$ i jest środkiem jednokładności odwrotnej; 3) i 4) że J leży zewnątrz trójkąta i jest środkiem jednokładności prostej lub odwrotnej.

3. Dany kwadrat przekształcić jednokładnie względem środka J tak, by bok nowego kwadratu przechodził przez dany punkt.

4. Dwa kwadraty, mające wspólny środek symetrii, są jednokładne względem tego środka, jeżeli bok a jednego kwadratu jest równoległy do boku a' drugiego.

Czy można to samo powiedzieć o dwóch prostokątach, czy też powinny one spełniać jakiś dodatkowy warunek i jaki mianowicie?

5. Każde dwa równoległe do siebie odcinki są z sobą jednokładne, i to zarówno jednokładne wprost, jak i odwrotnie.

6. Dowieść, że w każdym trapezie środki podstaw, punkt przecięcia się przekątnych, oraz punkt, w którym przecinają się dwa nierównoległe boki, leżą na jednej prostej.

7. Na zasadzie poprzedniego zadania rozwiązać zadanie następujące: mamy dane dwa równoległe do siebie odcinki AB , CD ; podzielić je na połowy, posługując się tylko linjalem.

8. Dany jest odcinek AB i środek jego M ; przez punkt C poprowadzić równoległą do AB , posługując się tylko linjalem.

9. Dane są dwie równoległe do siebie proste i punkt A , nie leżący na nich; przez A poprowadzić trzecią prostą, równoległą do obu danych, posługując się tylko linjalem.

że zaś trzy pierwsze odcinki JO , JO' , OA są w zupełności wyznaczone i stałe, zatem $O'A'$, jako odcinek czwarty proporcjonalny, jest też wyznaczony i ma stałą wielkość.

Widzimy tedy, iż wszystkie punkty

10. Dane są dwie równoległe m , p i na jednej z nich odcinek AB ; zbudować na tej samej prostej odcinek AC dwa razy większy od AB , posługując się tylko linjalem (rys 191)*).

11. Dany czworobok $ABCD$ przekształcić jednokładnie tak, by bok a' nowego czworoboku równał się danemu odcinkowi.

12. Opierając się na pojęciu jednokładności i posługując się rysunkiem 192, dowieść własności środkowych trójkąta (§ 81, str. 59).

14. Jeżeli dwa trójkąty są z sobą jednokładne, wówczas odpowiadają sobie ich środki ciężkości, jak również środki kół wpisanych, zawpisanych i opisanych. To samo dotyczy ortocentrow.

15. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ poprowadzimy wysokość AA' , z punktu zaś A' poprowadzimy prostą $A'B''$, $A'C''$ do boków b i c , wówczas prosta $B''C''$ musi być równoległa do prostej $B'C'$, łączącej spodki wysokości h_b , h_c .

16. W czworoboku $ABCD$ z punktu E , w którym przecinają się przekątne, kreślimy proste EK , EL równoległe do boków a , d . Niech punkty K , L leżą odpowiednio na bokach b , c . Co można powiedzieć o położeniu prostej KL ?

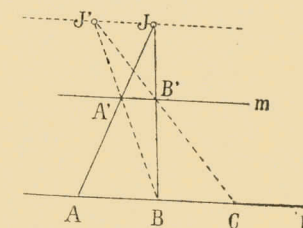
17. Przez dany punkt A poprowadzić prostą, któraby przeszła przez niedostępny punkt przecięcia się X dwóch danych prostych m , p [Wskaźnik: § 220 wniosek 6].

18. Dane są dwie proste m , p , przecinające się w punkcie niedostępnym X , oraz jakakolwiek trzecia prosta s , nie przechodząca przez X . Wykreślić prostą, równoległą do s i przechodzącą przez punkt X .

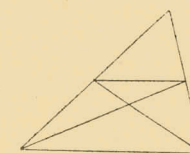
*) Czytelnika, pragnącego poznać bliżej sprawę rozwiązywania zadań konstrukcyjnych bez użycia cyrkla, odsyłamy do klasycznego dziełka:

Jakób Steiner. *Konstrukcje geometryczne, wykonane za pomocą linii prostej i stałego koła*. Przełożył Stefan Kwieciński, Warszawa 1915.

Rozprawa ta, napisana przez jednego z największych matematyków XIX w., szwajcara J. Steinera (1796—1863 r.), należy do arcydzieł literatury matematycznej ze względu na prostotę, przejrzystość i piękno wykładu. Jest ona zupełnie przystępna dla ucznia szkoły średniej. Z rozdziału II tego dziełka zapożyczyliśmy [metodę rozwiązywania zadań 7—10.



Rys. 191.



Rys. 192.

[Wskazówka: uważajmy punkt X za wierzchołek jednego z dwóch trójkątów jednokładnych; środek jednokładności obierzmy dowolnie na prostej m i zbudujmy jeden trójkąt tak, by bok jego leżał na s lub był równoległy do s].

19. W czworoboku $ABCD$ tylko dwa przeciwległe wierzchołki A, C są dostępne. Wykreślić prostą BD . [Wskazówka do analizy: zbudować czworobok jednokładny z danym względem punktu A , jako środka jednokładności].

20. W trójkącie $\triangle ABC$ kreślimy wysokość AA' , z punktu A' kreślimy $A'B'' \perp b$ oraz $A'C'' \perp c$, a następnie prowadzimy z tego samego punktu dwie prostopadłe $A'B'''$ oraz $A'C'''$ do wysokości BB' i CC' trójkąta danego $\triangle ABC$. Dowieść, że cztery punkty B'', B''', C'', C''' leżą na jednej prostej. [Wskazówka: trójkąty $\triangle BB'C'$, $\triangle A'B''C''$ są jednokładne—porówn. powyżej zadanie 15-te].

21. Dwa koła, leżące w jednej płaszczyźnie, są zawsze jednokładne z sobą, przytym dwomasposobami, tak iż możemy je uważać zarówno za jednokładne wprost, jak i odwrotnie. Środek jednokładności prostej dwóch kół nazywamy również ich *środkiem jednokładności zewnętrznym*, środek zaś jednokładności odwrotnej nazywamy *środkiem jednokładności wewnętrznym*. [Wskazówka: w kole O kreślimy dowolny promień OA , w kole O' równoległe do niego dwa promienie $O'A'$, $O'A''$, poczym A łączymy z A' i z A''].

22. Jeżeli dwa koła uważamy za jednokładne, wówczas każdemu punktowi jednego koła odpowiada w drugim kole dwa punkty, symetrycznie położone względem środka tego koła. Tak samo każdej cięciwie pierwszego koła odpowiada w drugim kole dwie równoległe do niej cięciwy, symetrycznie położone względem środka koła.

23. Każdej stycznej jednego koła odpowiada w kole jednokładnym dwie równoległe do niej styczne.

24. Spólne styczne wewnętrzne dwóch kół przechodzą przez środek jednokładności wewnętrzny, spólne zaś styczne zewnętrzne—przez środek jednokładności zewnętrzny.

Spólne styczne, jak wiadomo, nie zawsze istnieją (str.); czy mogą istnieć środki jednokładności takich kół, które nie mają spólnych stycznych?

25. Na mocy poprzedniego zadania znaleźć nowy sposób budowania spólnych stycznych do dwóch kół.

26. Dane jest koło $(O)A$ i punkt J ; wykreślić drugie koło tak, by było ono jednokładne z danym względem środka jednokładności J i spełniało prócz tego jeden z następujących warunków:

- 1) przechodziło przez punkt dany A' na prostej AJ ;
- 2) miało promień równy danemu odcinkowi;
- 3) miało środek na danej prostej.

Niech będzie dany trójkąt $\triangle ABC$ i w nim wysokości AA', BB', CC' . Oznaczmy przez A_1, B_1, C_1 środki boków a, b, c , przez H ortocentr, przez O środek koła opisanego na trójkącie $\triangle ABC$.

27. Trójkąty $\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1$ są z sobą jednokładne. Stąd wynika, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie (nazwijmy go G), przyczym mamy $AG=2GA_1, BG=2GB_1, CG=2GC_1$.

28. Trójkąty $\triangle OB_1C_1, \triangle CBH$ są odwrotnie jednokładne względem punktu G (środka ciężkości trójkątu $\triangle ABC$). Boki ich mają się do siebie tak, jak 1 do 2, zatem $GH=2GO$. (Odcinek OH nazywa się odcinkiem Eulera—porówn. ćwiczenie XIX, 34).

29. Ponieważ trójkąty $\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1$ są z sobą jednokładne, zatem koło $(O)A$, opisanemu na pierwszym trójkącie, odpowiada koło, opisane na drugim trójkącie. Środek tego nowego koła oznaczamy przez N . Dowieść następujących własności koła $(N)A_1$, zwanego kołem dziewięciu punktów lub kołem Feuerbacha:

1) Promień koła dziewięciu punktów jest dwa razy mniejszy od promienia koła $(O)A$.

2) Koło $(N)A_1$, przechodzi przez spodki A', B', C' wysokości trójkąta i przez środki odcinków HA, HB, HC (porówn. ćwiczenie XIX 33);

3) Ortocentr H jest środkiem jednokładności zewnętrznym kół $(O)A, (N)A_1$, środek zaś ciężkości G jest dla tych samych kół środkiem jednokładności wewnętrznym;

4) Mamy $GO=2GN$ i, co zatem idzie, $HO=2HN$, wreszcie $NO=NH$.

Pojęcie jednokładności oddaje często poważne usługi przy rozwiązywaniu zadań konstrukcyjnych. Jeżeli mamy zamiar zbudować figurę F , lecz analiza wykazuje, iż łatwiejszą rzeczą jest zbudowanie figury F' jednokładnej z szukaną względem jakiegoś znanego środka, wówczas wskazane jest użycie *metody jednokładności*. Jak należy stosować tę metodę, poznamy najlepiej na przykładach.

30. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dany pod względem wielkości i położenia bok a , prócz tego zaś kąt $\sphericalangle B$ oraz warunek, że $a:c=m:k$, gdzie m i k są odcinkami danymi. [Wskazówka: ponieważ mamy dany bok BC , budujemy przy jednym jego końcu kąt $\sphericalangle B$ i na jego ramionach odkładamy odcinki m, k].

31. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dany bok a oraz warunek, że boki a, b, c mają być proporcjonalne do trzech danych odcinków m, k, p . [Wskazówka: budujemy trójkąt $\triangle KMP$, poczym przekształcamy go jednokładnie].

32. Zbudować trójkąt prostokątny $\triangle ABC$, mając dany kąt ostry $\sphericalangle A$ i środkową sa . [Wskazówka do analizy: trójkąt $\triangle CA'B'$ jest jednokładny z szukanym, jeżeli $\sphericalangle A'=\sphericalangle A$].

Zbudować trójkąt prostokątny $\triangle ABC$, mając dane:

33. A, p .
34. $A, hc + c$.
35. $A, c - hc$.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

36. $A, B, s_c + h_c$. 37. $A, B, a + h_a$. 38. $A, B, R + p$.

39. c oraz warunki $h_c : a = m : k$, $h_c : b = p : n$, gdzie m, k, n, p są to cztery dane odcinki. [Wskazówka do analizy: pierwszy warunek wyznacza kształt trójkąta $\triangle BC'C$, gdzie CC' jest wysokością trójkąta szukanego].

40. $A, c + h_c$ i warunek, że $h_c : a = m : k$, gdzie m, k są odcinki dane.

41. Zbudować czworobok, mając dane: przekątną e , oraz cztery kąty $\sphericalangle(fa)$, $\sphericalangle(fb)$, $\sphericalangle(fc)$, $\sphericalangle(fd)$.

42. W dany trójkąt $\triangle ABC$ wpisać kwadrat tak, by dwa jego wierzchołki leżały na boku a , drugie zaś dwa na bokach b i c . [Wskazówka: wykreślamy dowolnej wielkości kwadrat, mający dwa wierzchołki na boku a , jeden zaś na boku b i przekształcamy go jednokładnie względem wierzchołka C].

43. W dany trójkąt wpisać prostokąt, którego boki tworzyłyby proporcję z danymi odcinkami m, k .

44. W dany trójkąt wpisać trójkąt o bokach równoległych do trzech danych prostych x, y, z .

45. W trójkąt dany $\triangle ABC$ wpisać romb tak, by jeden jego bok leżał na prostej c i jedna przekątna była równoległa do b .

46. W półkoło, zamknięte średnicą AB , wpisać kwadrat tak, by dwa jego wierzchołki leżały na AB . [Wskazówka: na AB , jako na boku, budujemy kwadrat].

47. W kwadrat wpisać trójkąt o danych kątach tak, by jeden wierzchołek trójkąta leżał w wierzchołku kwadratu.

48. Wykreślić okrąg, przechodzący przez dany punkt A i styczny do ramion kąta $\sphericalangle MON$. [Wskazówka: kreślimy najpierw dowolny okrąg, styczny do ramion kąta $\sphericalangle MON$].

49. Dane są dwie przecinające się proste m, p i koło O ; wykreślić nowe koło, styczne jednocześnie do danego koła i do obu prostych m, p . [Wskazówka do analizy: punkt styczności S obu kół musi być ich środkiem jednokładności (wewnętrznym — przy styczności zewnętrznej i zewnętrznym — przy styczności wewnętrznej); jako taki, punkt S musi leżeć na prostej, łączącej dwa jakiejkolwiek odpowiadające sobie punkty. Jeden taki punkt otrzymamy, prowadząc styczne do koła O , równoległe do prostych m, p ; drugim jest punkt przecięcia się prostych m, p].

50. Dane są trzy proste k, m, p , przecinające się w punkcie J ; wykreślić okrąg, styczny do k , mający środek na prostej m i wyznaczający na p cięciwę danej długości.

51. Dane są dwa koła; wykreślić trzecie koło, styczne do nich w takich dwu punktach X, Y , żeby prosta XY przechodziła przez dany punkt M .

52. W danym kole wykreślić pięć równych kwadratów tak, by każdy bok wewnętrznego kwadratu był zarazem bokiem jednego z zewnętrznych, te zaś żeby miały po dwa wierzchołki na okręgu koła.

53. Na danym kole opisać romb, mając dany warunek, że $a : e = m : k$, gdzie m, k są to dwa dane odcinki. [Wskazówka: można wykreślić romb, w którym bok $= m$, przekątna $= k$ i wpisać koło w taki romb, poczym figurę przekształcić].

54. W dany trójkąt wpisać romb, mając dany warunek, że $e : f = m : k$.

MIEJSCA GEOMETRYCZNE.

55. Z punktu A na okręgu $(O)A$ prowadzimy wszelkie możliwe cięciwy i na ich przedłużeniu odkładamy odcinki 3 razy większe od tych cięciw. Jakie jest miejsce geometryczne końców tych odcinków?

55a. Z punktu M , nie leżącego na okręgu $(O)A$, prowadzimy do tego okręgu wszelkie możliwe odcinki $MA_1, MA_2, \dots$ i na każdym z nich (lub na przedłużeniu każdego z nich) odkładamy odcinki $MB_1 = nMA_1, MB_2 = nMA_2, \dots$, gdzie n jest pewną stałą liczbą. Jakie jest miejsce geometryczne punktów B ?

56. W trójkącie $\triangle ABC$ bok a jest nieruchomy, wierzchołek zaś A posuwa się tak, że kąt $\sphericalangle A$ pozostaje stałej wielkości; co kreśli środek ciężkości trójkąta?

57. W trójkącie $\triangle ABC$ bok a jest nieruchomy, środkowa zaś s_b obraca się dokoła B , zachowując stałą wielkość. Co kreśli wierzchołek A ? Co kreśli środek ciężkości trójkąta?

58. W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$, w którym $\sphericalangle C = \delta$, na przedłużeniu przyprostokątnej a odkładamy $CD = a$ i punkt D łączymy ze środkiem O koła, opisanego na trójkącie $\triangle ABC$. Niech proste AC, DO przecinają się w punkcie K . Co kreśli punkt K , gdy wierzchołek C kąta prostego posuwa się po okręgu koła opisanego, przeciwprostokątna zaś pozostaje nieruchoma? [Wskazówka: połączyć A z D ; czym jest punkt K w trójkącie $\triangle ADB$?].

59. W trójkącie $\triangle ABC$ bok AB jest nieruchomy, jak również środek C' wysokości, poprowadzonej do tego boku. Jakie jest miejsce geometryczne wierzchołka? Jakie jest miejsce środka ciężkości trójkąta?

60. Dane jest koło i w nim cięciwa nieruchoma AB . Przez A prowadzimy cięciwę ruchomą AC i budujemy równoległobok $ABXC$. Jakie jest miejsce geometryczne środka E tego równoległoboku? Jakie miejsce geometryczne wierzchołka X ?

61. Dany jest odcinek AB , którego końce leżą na ramionach kąta $\sphericalangle MON$. Na odcinku tym wybieramy punkt C taki, że $AC : CB = m : k$, gdzie m, k są to dwa dane stałe odcinki. Co kreśli punkt C , gdy prostą AB przesuwamy równolegle?

62. Jakie jest miejsce środków wszystkich prostokątów, wpisanych w dany trójkąt $\triangle ABC$ tak, że dwa wierzchołki każdego z nich leżą na boku a ? [Wskazówka: jeżeli A' jest środkiem boku a, A_1 , zaś spodkiem wysokości, wówczas stosujemy poprzednie zadanie do kąta $\sphericalangle AA'A_1$].

63. Jakie jest miejsce geometryczne punktów, których odległości od ramion danego kąta są proporcjonalne do danych odcinków m, k ?

64. Na odcinku AB , jako na średnicy, kreślimy koło, punkt M okręgu łączymy z punktem A , ze środka koła prowadzimy prostopadłą OK do cięciwy AM , wreszcie łączymy M ze środkiem O' promienia OA . Niech proste $OK, O'M$ przecinają się w punkcie X . Co kreśli punkt X , gdy punkt M porusza się po okręgu?

65. Na prostej mamy dane trzy punkty A, B, C . Przez A i B prowadzimy koła, z punktu zaś C kreślimy styczne. Jakie jest miejsce geometryczne punktu styczności?

ROZDZIAŁ IV.

O podobieństwie.

§ 221. Wyobraźmy sobie, iż mając dane na płaszczyźnie dwie figury jednokładne F i F' , jedną z nich przesunęliśmy lub obróciliśmy. Figury przestały być jednokładnymi, mianowicie nie mają już jednej z cech charakterystycznych jednokładności: nie posiadają punktu, w którym schodziłyby się proste, łączące odpowiednie punkty tych figur. Natomiast inne własności, związane z wielkością i kształtem figur, nie zaś z ich położeniem, nie mogły ulegnąć zmianie.

Wiemy np., iż dwa trójkąty jednokładne mają boki odpowiednio równoległe, kąty odpowiednio równe, a prócz tego boki ich są do siebie proporcjonalne. Po przemieszczeniu jednego trójkąta muszą one utracić pierwszą własność, lecz zachować drugą i trzecią. Dwa takie trójkąty nazywamy *podobnymi*. Mamy tedy następujące określenie.

Określenie. Dwa trójkąty (lub wielokąty) są podobne, jeżeli odpowiadające sobie boki są proporcjonalne, kąty zaś zawarte między odpowiednimi bokami równają się sobie.

Symbolem podobieństwa niech będzie znak ∞ . Chcąc tedy wyrazić, iż trójkąty $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ są do siebie podobne, piszemy $\triangle ABC \infty \triangle A'B'C'$.

§ 222. W myśl tego określenia, jeżeli dwa trójkąty $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ są do siebie podobne, wówczas mamy jednocześnie

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A', \sphericalangle B = \sphericalangle B', \sphericalangle C = \sphericalangle C'$$

oraz

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Nie wszystkie te warunki są od siebie niezależne. Innymi słowami: jeżeli niektóre z tych warunków są spełnione, wówczas pociągają one za sobą istnienie pozostałych warunków, a więc i podobieństwo trójkątów.*) To prowadzi do ustalenia t. zw. cech podobieństwa trójkątów.

§ 223. Twierdzenia (trzy cechy podobieństwa trójkątów).

Dwa trójkąty są do siebie podobne, jeżeli

1-o albo mają po dwa kąty odpowiednio równe,

2-o albo mają po jednym równym kącie, boki zaś, zawierające ten kąt, tworzą proporcję,

3-o albo mają wszystkie boki proporcjonalne.

W celu dowiedzenia tych trzech twierdzeń możemy zastosować pewną jednostajną metodę. Jeżeli mianowicie chcemy wykazać, że trójkąty T_1, T_2 są do siebie podobne, wówczas wystarczy zbudować trójkąt $T_3 \equiv T_2$ tak, by nowy trójkąt T_3 był jednokładny z trójkątem T_1 .

I. Niech będą dane dwa trójkąty $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ (rys. 193), w których

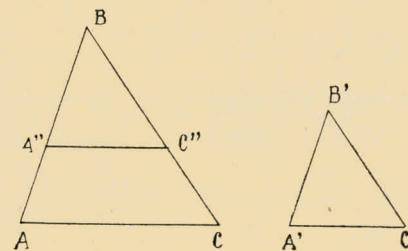
$$\sphericalangle A = \sphericalangle A', \sphericalangle B = \sphericalangle B'.$$

Odkładamy na boku c odcinek

$$BA'' = B'A'$$

i przez punkt A'' kreślimy równoległą do AC .

W ten sposób otrzymujemy trójkąt $\triangle A''BC''$



Rys. 193.

*) Mamy tu zjawisko zupełnie analogiczne do tego, które dostrzegliśmy przy równości trójkątów: z sześciu warunków, określających równość trójkątów, trzy odpowiednio dobrane wystarczają do wyznaczenia tej równości (porówn. str. 27, § 40).

jednokładny z trójkątem $\triangle ABC$ (dla czego?). Otóż powiadam, że

$$\triangle BA''C'' \equiv \triangle B'A'C'.$$

Jakoż mamy $BA'' = B'A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle A'' = \sphericalangle A$.

Z równości tych trójkątów wynika, że

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

II. Mając dane dwa trójkąty $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$, w których

$$\sphericalangle B = \sphericalangle B' \text{ oraz } \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'},$$

powtarzamy tę samą konstrukcję, co w przypadku pierwszym, i otrzymujemy znów dwa trójkąty jednokładne $\triangle ABC, \triangle A''BC''$. Pozostaje do dowiedzenia, że

$$\triangle A''BC'' \equiv \triangle A'B'C'.$$

Przedewszystkim wiemy, że $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $BA'' = B'A' = c'$.

Dalej, z jednokładności trójkątów wynika proporcja

$$\frac{c}{BA''} = \frac{a}{BC}$$

czyli

$$\frac{c}{c'} = \frac{a}{BC''}.$$

Ponieważ może istnieć tylko jeden odcinek czwarty proporcjonalny do trzech danych odcinków i, według warunków twierdzenia, tych czwartym proporcjonalnym jest bok a' trójkąta $\triangle A'B'C'$, zatem musi być

$$a' = BC''$$

czyli

$$\triangle A''BC'' \equiv \triangle A'B'C'.$$

Stąd wynika, że $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

III. Załóżmy teraz, że mamy dane dwa trójkąty $\triangle ABC, \triangle A'BC'$, spełniające warunek, że

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Powiadam, że i w tym wypadku trójkąty są do siebie podobne.

Powtarzam tę samą konstrukcję, co w dwóch przypadkach poprzednich; znów otrzymują dwa trójkąty $\triangle ABC, \triangle A''BC''$ i znów postaram się dowieść, że

$$\triangle A''BC'' \equiv \triangle A'B'C'.$$

Otóż z konstrukcji mamy również

$$BA'' = B'A' = c'.$$

Z jednokładności trójkątów wynika proporcja

$$\frac{c}{BA''} = \frac{b}{A''C''}$$

czyli

$$\frac{c}{c'} = \frac{b}{A''C''}.$$

Ponieważ istnieje tylko jeden odcinek czwarty proporcjonalny do trzech danych c, c', b , i tym odcinkiem jest, według warunków twierdzenia, bok b' trójkąta danego $\triangle A'B'C'$, zatem musi być

$$A''C'' = A'C' = b'.$$

W taki sam sposób uczeń dowiedzie, iż

$$BC'' = B'C' = a'.$$

Trójkąty $\triangle A''BC'', \triangle A'B'C'$ równają się sobie, gdyż trzy boki jednego równają się trzem bokom drugiego. Stąd i z jednokładności trójkątów $\triangle ABC, \triangle A''BC''$ wynika, że istotnie

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Ćwiczenia XXXIV. 1. Ile warunków wystarcza do wyznaczenia dwóch trójkątów podobnych?

2. Trójkąty prostokątne są podobne: 1) jeżeli mają po równym kącie ostrym; 2) jeżeli przyprostokątne ich tworzą proporcję; 3) jeżeli przeciwprostokątne wraz z jedną parą przyprostokątnych tworzą proporcję.

3. Trójkąty równoramienne są podobne, jeżeli kąty ich przeciwległe podstawom są sobie równe.

4. W trójkącie $\triangle ABC$ wykreślić wysokości, znaleźć podobne trójkąty prostokątne i wykazać, że boki trójkąta są odwrotnie proporcjonalne do odpowiednich wysokości.

5. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane trzy jego wysokości.

6. W podobnych trójkątach boki są proporcjonalne do wysokości, które zostały poprowadzone do tych boków.

7. Dwa trójkąty są podobne, jeżeli mają po równym kącie, wysokości zaś, poprowadzone do boków, między którymi zawierają się te równe kąty, tworzą proporcję.

8. Trójkąty $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ są do siebie podobne, jeżeli mamy

$$\sphericalangle B = \sphericalangle B' \text{ oraz } R : R' = a : a',$$

gdzie R i R' oznaczają promienie kół opisanych na trójkątach.

9. Trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ są do siebie podobne, jeżeli mamy

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

10. Jeżeli na trójkącie $\triangle ABC$ opisaliśmy koło, przez C poprowadziliśmy styczną, przez B zaś równoległą do tej stycznej i jeżeli ta równoległa przecina w punkcie X prostą AC , wówczas musi być

$$\frac{BX}{AB} = \frac{BC}{AC}$$

11. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy $c = 56$ cm. Na bokach a , b omieramy punkty D , E tak, żeby było $AD = \frac{1}{3} DC$, $BE = \frac{1}{3} EC$. Obliczyć długość odcinka DE .

12. Trójkąt $\triangle ABC$ przecięto prostą $DE \parallel AB$, tak iż powstał trapez $ADEB$, w którym $AD = 3$ cm., $DE = 8$ cm., $EB = 5$ cm., $BA = 12$ cm. Obliczyć boki trójkąta $\triangle ABC$.

13. Podstawy trapezu mają: jedna 6 cm., druga 11 cm., przekątne zaś mają 5 cm., i 14 cm. długości. Obliczyć odcinki, na które punkt przecięcia się przekątnych dzieli każdą z nich.

14. Podstawy trapezu mają 9 i 27 cm.; w jakim stosunku dzieli się przekątne trapezu?

15. Podstawy BC i AD trapezu równają się odpowiednio 15 cm. i 30 cm.; przez punkt E przecięcia się przekątnych prowadzimy odcinek FG równoległy do podstaw. Obliczyć długość odcinka FG i zbadać, w jaki sposób punkt E dzieli ten odcinek.

16. Promieniami, równającymi się 4 cm. i 6 cm. zakreślono dwa koła zewnętrznie do siebie styczne, poczym poprowadzono dwie ich wspólne styczne zewnętrzne, które przecinają się w punkcie I . Obliczyć odległość punktu I od środków obu kół.

17. Jeżeli dwa trójkąty o równych wysokościach zostały zbudowane na wspólnej podstawie po jednej stronie tej podstawy i jeżeli przecięliśmy je dowolną prostą równoległą do podstawy, wówczas odcinki tej równoległej, zawarte wewnątrz każdego trójkąta, są sobie równe.

18. Podstawy trapezu mają 40 cm. i 10 cm., jedna zaś z przekątnych dzieli trapez na dwa podobne do siebie trójkąty. Obliczyć długość tej przekątnej.

19. Podstawy BC i DA trapezu mają 5 cm. i 11 cm. długości; bok AB został podzielony na trzy równe części i przez punkty podziału poprowadzono równoległe do podstaw aż do przecięcia się z bokiem CD . Obliczyć długość tych równoległych.

20. W trapezie odcinek, łączący środki dwóch nierównoległych boków = 18 cm.; przekątne jego dzielą się w stosunku 4 : 5; obliczyć długość obu podstaw trapezu.

21. Promienie dwóch kół równają się odpowiednio 10 cm. i 20 cm.; odległość ich środków równa się 72 cm. Na jakie części dzieli tę odległość środek jednokładności wewnętrzny tych kół?

22. Promienie dwóch kół równają się odpowiednio 6 cm. i 10 cm.; odległość ich środków równa się 20 cm. Obliczyć odległość między środkiem jednokładności wewnętrznym i środkiem jednokładności zewnętrznym.

23. Dane są dwa koła zewnętrznie do siebie styczne. Odległość ich środków = 48 cm.; sieczna, poprowadzona przez ich punkt styczności, wyznacza w tych kołach cięciwy długości 10 cm. i 14 cm. Obliczyć promienie obu kół.

24. Boki równoległoboku równają się 25 cm. i 40 cm.; odległość pomiędzy bokami mniejszymi = 16 cm.; obliczyć odległość między bokami większymi.

25. W trójkącie $\triangle ABC$ kreślimy $DE \parallel AB$. Obliczyć długość odcinka DE , jeżeli wiemy, iż $c = 15$ cm., $h_c = 10$ cm. i że odległość między prostymi DE i AB wynosi 3 cm.

26. Jak należałoby wykreślić odcinek DE w zadaniu poprzednim, gdyby długość jego miała być 2 razy większa od długości boku AB ?

27. W trójkącie $\triangle ABC$ odkładamy na boku b odcinek $AD = m$ poczym łączymy D z takim punktem K na boku AB , iż $\sphericalangle ADK = \sphericalangle ABC$. Obliczyć odcinki AK i KD , kładąc $a = 16$ cm., $b = 19$ cm., $c = 30$ cm.

28. Czy w zadaniu poprzednim może się zdarzyć, żeby punkt K upadł na B ? Czy może zdarzyć się, żeby K upadł na przedłużenie boku AB ? [Wskazówka: przy badaniu zakładamy, iż bok b jest niezmienny, natomiast odcinek m jak również kąt $\sphericalangle B$ mogą zmieniać się. Zbadać zadanie przy trzech założeniach: 1) że kąt $\sphericalangle B$ jest prosty; 2) że jest ostry; 3) że jest rozwarty.]

29. W trójkąt $\triangle ABC$, w którym $a = 40$ cm., $h_a = 28$ cm., wpisano kwadrat, którego jeden bok leży na BC . Obliczyć bok kwadratu.

30. W poprzednim zadaniu zamiast kwadratu wzięto prostokąt, o bokach x , y takich, iż $x : y = 1 : 4$; obliczyć długość odcinków x , y .

31. W trójkąt równoramienny $\triangle ABC$, w którym $a = b$, wpisujemy koło. Dotyka ono boków a , b odpowiednio w punktach A_1 , B_1 . 1) Obliczyć długość odcinka A_1B_1 , kładąc $c = 10$ cm., $a = 16$ cm. 2) Czy da się pomyśleć taki trójkąt równoramienny, żeby było $A_1B_1 = \frac{1}{2} AB$?

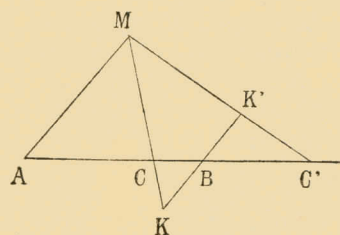
32. W zadaniu poprzednim kładziemy $c = 18$ cm.; jak wielkie muszą być boki a , b , żeby było $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{3}{4}$?

33. W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$, w którym $a = b$, mamy daną wysokość $h_c = 16$ cm. oraz wiemy, że zachodzi proporcja $a : c = 5 : 4$. Obliczyć promień koła wpisanego.

ROZDZIAŁ V.

O podziale harmonicznym odcinka.

§ 224. Zadanie. Dany odcinek AB podzielić proporcjonalnie do dwu danych odcinków m, k .



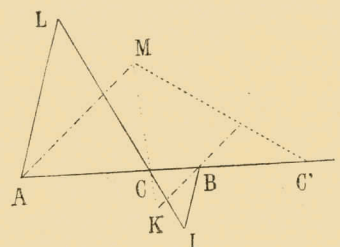
Rys. 194.

Przez punkty A, B prowadzimy dwie dowolne równoległe, na jednej z nich odkładamy odcinek $AM = m$, na drugiej odcinek $BK = k$, poczym łączymy M z K . Prosta MK przecina odcinek AB w żądanym punkcie C , gdyż mamy (§ 215).

$$AC : CB = m : k \dots\dots\dots (1).$$

Zwróćmy jednak uwagę na to, że na drugiej równoległej mogliśmy równie dobrze odłożyć odcinek $BK' = k$, łącząc zaś M i K' , otrzymalibyśmy na przedłużeniu odcinka AB punkt C' , czyniący zadość warunkom zadania, gdyż mamy (§ 215)

$$AC' : BC' = m : k \dots\dots\dots (2).$$



Rys. 195.

Zadanie tedy posiada niewątpliwie dwa rozwiązania. Dowiedzimy teraz, iż nie może ono mieć większej liczby rozwiązań. W tym celu wystarczy wykazać, że położenie punktu C nie zależy od kierunku, w którym poprowadziliśmy równoległe z punktów A i B .

Jakoż wykreślmy w dowolnym kierunku odcinek $AL = m$, połączmy L z C i wyznaczmy punkt I , w którym prosta LC przecina równoległą do AL , poprowadzoną z punktu B .

Na mocy § 215 mamy

$$AC : CB = m : BI,$$

punkt zaś C , znaleziony w poprzedniej konstrukcji, czyni zadość proporcji (1), zatem musi być

$$BI = k.$$

§ 225. O punktach C i C' powiadamy, iż oba one dzielą odcinek AB proporcjonalnie do odcinków m, k , przyczym punkt C dzieli odcinek AB wewnątrz, punkt C' zaś dzieli ten sam odcinek zewnątrz.

Mówimy również, że punkty C i C' dzielą odcinek AB harmonicznie. Dwie pary punktów A, B oraz C, C' nazywamy harmonicznie z sobą sprzężonymi.

Mamy tedy następujące

§ 226. Określenie. Dwie pary punktów A, B oraz C, C' nazywamy harmonicznie z sobą sprzężonymi, jeżeli punkty C, C' dzielą odcinek AB (wewnątrz i zewnątrz) proporcjonalnie do dwu danych, zresztą dowolnych odcinków.

Z proporcji (1) i (2) w § 224 wynika, iż związek harmoniczny między czterema punktami wyraża się proporcją

$$AC : CB = AC' : BC' \dots\dots\dots (3).$$

Uwaga. W celu zaznaczenia, iż dwie pary punktów A, B oraz C, C' są harmonicznie z sobą sprzężone, będziemy nieraz posługiwali się symbolem (AB, CC') . Symbol ten jest więc równoznaczny z proporcją (3).

§ 227. Wniosek. Jeżeli punkty C, C' dzielą harmonicznie odcinek AB , wówczas i nawzajem: punkty A, B dzielą harmonicznie odcinek CC' .

Istotnie, przedstawiając wyrazy w proporcji (3), mamy

$$CB : BC' = AC : AC';$$

innymi słowami, że z związku (AB, CC') wynika związek (CC', AB) .

§ 228. W zadaniu, rozwiązany w § 224, zakładaliśmy, iż dane odcinki m, k są stałe. Przypuśćmy teraz, że odcinki te są zmienne, i zbadajmy, w jaki sposób zmienia się przy tym położenie punktów C, C' na prostej.

1-o Załóżmy najpierw, że $m > k$, i przypuśćmy, iż odcinek k maleje, odcinek zaś m nie zmienia się, albo też wzrasta. Z konstrukcji, zarówno jak z rozważania proporcji (1) wynika, że wówczas punkty C i C' zbliżają się jednocześnie i nieograniczenie do punktu B .*) Nie mogą one zlać się z tym punktem, dopóki odcinek k nie zniknie czyli, jak mówią, nie stanie się równy zeru.

2-o Jeżeli, przeciwnie, odcinek k rośnie lub m maleje, tak, iż różnica między nimi staje się coraz mniejsza, wówczas punkt C zbliża się do środka odcinka, punkt C' zaś oddala się coraz bardziej w prawo od B .

3-o W chwili, gdy $m = k$, punkt C staje się środkiem odcinka, punkt C' zaś przestaje istnieć, gdyż prosta MK' (rys. 194) staje się równoległa do AB .

4-o Jeżeli przy dalszym wzrastaniu odcinka k lub zmniejszaniu się odcinka m , mamy $m < k$, wówczas punkt C stopniowo zbliża się do A , punkt C' zaś ukazuje się po lewej stronie punktu A i również zbliża się stopniowo do tego punktu.

Jak i w przypadku pierwszym, punkty C , C' nie mogą zlać się z punktem A , chyba że odcinek m stanie się równy zeru.

§ 229. Z powyższego badania widzimy, że jakiegokolwiek byłyby dwa dane odcinki m , k , istnieją zawsze na prostej AB dwa i tylko dwa różne punkty C , C' , dzielące odcinek AB proporcjonalnie do danych dwu odcinków m , k . Innymi słowami, jeżeli mamy dany odcinek AB , wówczas każdym dwu danym odcinkom m , k odpowiada para punktów, harmonicznie sprzężona z punktami A , B .

Wyjątek stanowi ten przypadek, gdy $m = k$ (przypadek 3-o w powyższym badaniu); mamy wówczas jeden tylko punkt C , który jest środkiem odcinka AB .

Umowa. Ponieważ matematyka nie lubi wyjątków i dąży do takiego formułowania praw, by zaznaczanie wyjątków nie było potrzebne, powiadamy więc, że i w tym przypadku

*) Uczeń wykona sam szereg rysunków, wykazujących zmienność położenia punktów C i C' .

istnieje punkt C' i nazywamy go **punktem niewłaściwym** prostej AB .

Czytelnikowi umowa ta wyda się niewątpliwie dziwaczną, zobaczymy jednak wkrótce, iż jest ona niezmiernie cenna.*)

§ 231. Z umowy naszej wynika, iż na prostej istnieje jeden tylko punkt niewłaściwy; punkt ten musimy konsekwentnie uważać za spólny wszystkim prostym, równoległym do danej.

W ten sposób będziemy mogli powiedzieć, że każde dwie proste, leżące w jednej płaszczyźnie, mają spólny punkt: punkt ten jest właściwy, jeżeli proste przecinają się, lub niewłaściwy, jeżeli proste są do siebie równoległe.

Chcąc pozostać w zgodzie z pewnikiem Ia, musimy założyć, iż dwie proste przecinające się nie mogą mieć spólnego punktu niewłaściwego, gdyż musiałyby mieć dwa punkty spólne: jeden właściwy (punkt przecięcia się), drugi niewłaściwy.

Jeśli chcemy zaznaczyć, że X jest punktem niewłaściwym, piszemy X_{∞} .

Ponieważ każda prosta posiada, zgodnie z naszą umową, jeden i tylko jeden punkt niewłaściwy, zatem prosta, łącząca dwa punkty niewłaściwe, nie może przechodzić przez żaden punkt właściwy. Składa się ona wyłącznie z punktów niewłaściwych i nazywa się prostą niewłaściwą.

Jeżeli chcemy zachować bez zmiany prawdę, że dwie proste mogą przecinać się tylko w jednym punkcie, wówczas musimy założyć, że na płaszczyźnie istnieje tylko jedna prosta niewłaściwa.

*) Gdy badamy liczby dodatnie, symbol $a-b$ ma dla nas sens tylko wówczas, gdy $a \geq b$; jeśli chcemy uniknąć wyjątków przy odejmowaniu, musimy wprowadzić umowę, na mocy której nawet przy $a < b$ symbolowi powyższemu nadajemy pewien sens. W ten sposób wprowadzamy do nauki liczby ujemne. Umowa ta jest równie dziwaczna, jak wprowadzenie punktu niewłaściwego; dopiero późniejsze doświadczenie wykazuje, że pojęcie liczby ujemnej jest istotnie praktyczne i płodne.

Jak widzimy, przy wprowadzeniu t. zw. elementów niewłaściwych, czyli punktów i prostych niewłaściwych, pewniki grupy I i II pozostają bez zmiany; pewnik IV należałoby wysłowić tak: dwie proste, które tworzą z poprzeczną kąty naprzemianległe wewnętrzne nierówne, przecinają się w punkcie właściwym. Określenie równoległych (§ 72) brzmiałoby: dwie proste, leżące w płaszczyźnie i nie przecinające się w punkcie właściwym, nazywamy równoległymi. Dwie równoległe przecinają się w punkcie niewłaściwym.— Reszta teorii, a w szczególności dowody twierdzeń §§ 73—83 nie wymagałyby żadnych zmian, prócz dodania przymiotnika: „właściwy” tam, gdzie mowa o punktach.

§ 231. Określenie. Jeżeli dowolny punkt O płaszczyzny, nie leżący na prostej m , połączymy z czwórką harmoniczną punktów (AB, CD) , leżących na tej prostej, otrzymamy cztery półproste, o których powiadamy, że tworzą pęk harmoniczny.

Półproste OA, OB nazywamy harmonicznymi sprzężonymi z półprostymi OC, OD .

Pęk taki oznaczamy symbolem $O(AB, CD)$.

W szczególności, gdyby punkt C był środkiem odcinka AB , wówczas sprzężony z nim punkt byłby punktem niewłaściwym D_∞ , prosta zaś OD_∞ byłaby równoległa do prostej AB . Pęk ten wypadłoby oznaczyć symbolem $O(AB, CD_\infty)$.

Rzecz jasna, że jeżeli mamy pęk $O(AB, CD)$, wówczas jedna z półprostych OC, OD leży wewnątrz kąta $\sphericalangle AOB$, druga zaś zewnątrz.

Uwaga. Ponieważ prostym równoległym przypisujemy spólny punkt niewłaściwy, możemy tedy uważać, że wszystkie proste do siebie równoległe tworzą pęk, którego wierzchołkiem jest ów spólny punkt niewłaściwy.

W szczególności, jeżeli przez cztery punkty harmoniczne (AB, CD) poprowadzimy cztery dowolne równoległe, otrzymamy pęk harmoniczny $X_\infty(AB, CD)$ gdzie X_∞ jest symbolem punktu niewłaściwego, spólnego czterem wykreślonym przez nas równoległym.

Ćwiczenia XXXV. 1. Wykazać, iż twierdzenia §§ 212, 215 dadzą się ująć w postać jednego twierdzenia, jeżeli wprowadzimy pojęcie punktu niewłaściwego i równoległe uważać będziemy jako proste jednego pęku.

2. Dany jest odcinek AB i na nim punkt C ; zbudować punkt czwarty harmoniczny, opierając się na § 224.

2a. To samo zadanie, jeżeli punkt C jest dany na przedłużeniu odcinka AB .

3. Na mocy tego samego § 224 zbudować pęk harmoniczny, mając dany wierzchołek pęku O i trzy półproste OA, OB, OC , należące do tego pęku.

4. Wykazać, że dwa boki a, b trójkąta, środkowa s_c i prosta, poprowadzona przez wierzchołek C równoległa do boku c , tworzą pęk harmoniczny.

5. Znaleźć półprostą czwartą harmoniczną do dwóch boków a, b równoległoboku i do przekątnej e .

6. Rozwiązać zadanie 3-cie, opierając się na zadaniu 5-ym.

7. Zbudować pęk harmoniczny $O(AB, CD)$ tak, żeby było:

$$1) \sphericalangle AOB = \sphericalangle COD = \delta;$$

$$2) \sphericalangle AOB = \delta, \sphericalangle COD = \alpha, \text{ gdzie } \alpha \text{ jest danym kątem, zresztą dowolnym.}$$

8. Wykazać, że środki jednokładności J, J' dwu danych kół $(O)r, (O')r'$ dzielą harmonicznie odcinek OO' .

8a. Opierając się na zadaniu 8-ym, 1) podzielić dany odcinek AB proporcjonalnie do dwu danych odcinków m, k ; 2) zbudować punkt czwarty harmoniczny do trzech danych.

8b. Odcinek WW_a , łączący środek koła wpisanego w trójkąt $\triangle ABC$ ze środkiem koła zawpisanego, leżącego w kącie $\sphericalangle A$, jest podzielony harmonicznie przez wierzchołek A i przez punkt przecięcia się prostej WW_a z bokiem a .

8c. W tym samym trójkącie rozważamy dwa koła zawpisanne, leżące w kątach $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$; znaleźć punkt czwarty harmoniczny względem punktów W_a, W_b, C .

9. Jeżeli mamy czwórkę harmoniczną punktów (AB, CD) , przyczem O jest środkiem odcinka AB , wówczas $\boxed{AO} = \boxed{OC; OD}$

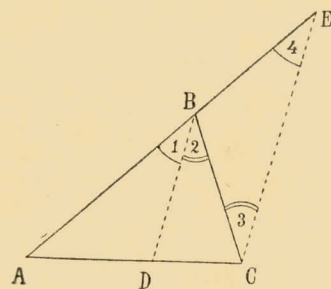
[Wskazówka: z proporcji, cechującej podział harmoniczny, otrzymać proporcję $(AO + OC):(AO - OC) = (AO + OD):(OD - AO)$].

10. Opierając się na zadaniu 9-ym, podać nowe rozwiązanie zadania 2-go.

11. Jeżeli mamy czwórkę punktów harmoniczną (AB, CD) , wówczas koło, mające za średnicę odcinek AB , przecina pod kątem prostym każde koło, przechodzące przez punkty C i D .

12. Jeżeli dwa koła przecinają się pod kątem prostym, to ich średnice, położone na linii środków, dzielą jedna drugą harmonicznie

§ 232. Twierdzenie. Dwusieczna wewnętrzna i zewnętrzna, poprowadzone z jednego wierzchołka trójkąta, dzielą przeciwległy jego bok harmonicznie, a mianowicie dzielą go wewnętrznie i zewnętrznie na odcinki, proporcjonalne do dwu drugich boków trójkąta.



Rys. 196.

I. Niech będzie dany trójkąt $\triangle ABC$ i w nim dwusieczna wewnętrzna BD . Mamy dowiedzieć, iż

$$AD : DC = AB : BC \dots (1).$$

W tym celu z C prowadzimy prostą CE , równoległą do dwusiecznej, tak iż mamy

$$AD : DC = AB : BE \dots (2).$$

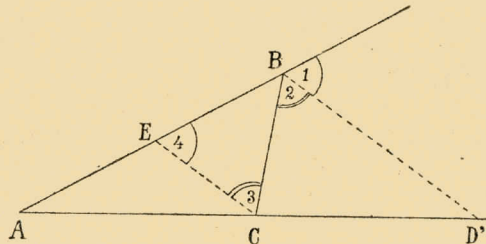
Aby z proporcji (2) otrzymać proporcję (1), musimy wykazać, iż $BE = BC$ czyli że trójkąt $\triangle BEC$ jest równoramienny.

Tak jest istotnie, gdyż

$$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 \quad (\text{dlaczego?})$$

II. Jeżeli w tym samym trójkącie BD' jest dwusieczną zewnętrzną (rys. 197), wówczas powiadam, że musi być

$$AD' : CD' = AB : BC \dots (1')$$



Rys. 197.

Kreślimy, jak poprzednio, z wierzchołka C równoległą do dwusiecznej i otrzymujemy proporcję

$$AD' : CD' = AB : EB \dots (2')$$

Pozostaje do wykazania, iż $EB = BC$ czyli że trójkąt $\triangle EBC$ jest równoramienny.

Tak jest istotnie, gdyż

$$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3.$$

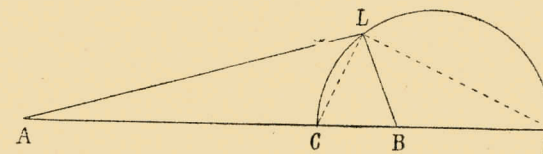
Z proporcji (1) i (1') wynika, iż

$$AD : DC = AD' : CD'.$$

§ 233. Twierdzenie odwrotne (względem § 232). Jeżeli prosta, poprowadzona z wierzchołka trójkąta, dzieli przeciwległy bok proporcjonalnie do dwóch boków przyległych, wówczas prosta ta jest dwusieczną wewnętrzną lub zewnętrzną trójkąta.

Istotnie, na odcinku AC (rys. 196 i 197) istnieje tylko jeden punkt wewnętrzny D , dzielący ten odcinek proporcjonalnie do boków c, a , na przedłużeniu zaś odcinka AC istnieje jeden tylko punkt zewnętrzny D' , dzielący go w taki sam sposób. Punkty D i D' są spodkami dwusiecznych; jeśli więc prosta przechodzi przez wierzchołek B i dzieli bok b proporcjonalnie do boków c, a , to musi przechodzić przez jeden z tych dwu punktów czyli jest dwusieczną wewnętrzną BD lub zewnętrzną BD' .

§ 234. Twierdzenie. Jeżeli mamy dany odcinek AB i punkty C, D , dzielące go wewnątrz i zewnątrz proporcjonalnie do odcinków m, k , wówczas okrąg koła, zakreślonego na średnicy CD , jest miejscem geometrycznym punktów, których odległości od A i B są proporcjonalne do odcinków m i k . (Koło to nazywa się kołem Apollonjusza*).



Rys. 198.

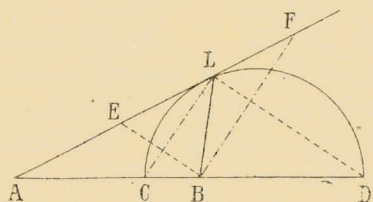
I. Najpierw ustalimy, że wszystkie punkty, których odległości od A i B są proporcjonalne do m i k , leżą na kole Apollonjusza.

Istotnie, jeżeli punkt L czyni zadość powyższemu warunkowi, t. j. jeżeli mamy proporcję

$$AL : LB = m : k,$$

*) Od imienia słynnego uczonego z III wieku przed Chr., który nauczał w Aleksandrii, a następnie w Pergamie. Apollonjusz był obok Euklidesa i Archidemesa największym matematykiem starożytności. Prace jego dotyczyły głównie teorii t. zw. przecięć stożkowych, t. j. krzywych, które tworzą się na powierzchni stożka, przeciętego płaszczyzną. Krzywe te są to elipsa, parabola i hiperbola. Zapoznamy się z nimi w stereometrii.

wówczas dwusieczne: wewnętrzna i zewnętrzna kąta $\sphericalangle L$ muszą przechodzić przez punkty C, D , dzielące wewnętrznie i zewnętrznie odcinek AB proporcjonalnie do m i k . Ale dwusieczne te są zawsze do siebie prostopadłe (dlaczego?), a więc $\sphericalangle CLD$ jest prosty i punkt L leży istotnie na kole, którego średnicą jest odcinek CD .



Rys. 199.

II. Odwrotnie: jeżeli L jest dowolnym punktem na kole Apollonjusza,

wówczas musi być

$$AL : LB = m : k.$$

Jakoż z punktu B poprowadźmy dwa odcinki: odcinek BE równoległy do LD i odcinek BF równoległy do LC .

Mamy wówczas dwie proporcje:

$$\begin{aligned} AL : EL &= AD : BD \\ AL : LF &= AC : CB. \end{aligned} \quad \text{..... (1)}$$

oraz

Ponieważ jednak

zarówno

$$AD : BD = m : k,$$

jak

$$AC : CB = m : k,$$

zatem proporcje (1) przybierają postać następującą:

$$\begin{aligned} AL : EL &= m : k \\ AL : LF &= m : k \end{aligned} \quad \text{..... (2)}$$

Z tych proporcji (2) widzimy, że musi być

$$EL = LF \quad \text{..... (3)}$$

gdyż istnieje tylko jeden odcinek, czwarty proporcjonalny do trzech odcinków AL, m, k .

Zwróćmy teraz uwagę na to, że

$$\sphericalangle EBF = \delta$$

a to z powodu, iż $EB \parallel LD, FB \parallel LC$ i że $\sphericalangle CLD = \delta$.

Tak więc trójkąt $\triangle BEF$ jest prostokątny. Punkt L jest w nim środkiem przeciwprostokątnej [na mocy równości (3)] czyli środkiem koła opisanego. Stąd wynika, że LB jest

promieniem koła opisanego i że mamy

$$LB = EL = LF.$$

Jeżeli w proporcjach (2) zastąpimy odcinki EL, LF przez LB , otrzymamy

$$AL : LB = m : k.$$

Ćwiczenia XXXVI. 1. Odcinek AB podzielić proporcjonalnie do dwu danych odcinków m, k , opierając się na twierdzeniu § 234.

2. Czy twierdzenie § 232 pozostaje prawdziwe, jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ (rys. 196) mamy $BA = BC$?

3. Dany jest kąt prosty; zbudować pęk harmoniczny tak, by w skład jego wchodziły oba ramiona kąta prostego.

4. Jeżeli w trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$ podzielimy podstawę c na trzy równe części i punkty podziału połączymy z przeciwległym wierzchołkiem C , wówczas w ten sposób nie podzielimy kąta $\sphericalangle C$ na trzy równe części.

5. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy daną sumę boków $a + b = 8$ cm. oraz odcinki, wyznaczone na boku C przez dwusieczną wewnętrzną kąta $\sphericalangle C$, mianowicie $u_a = 2\frac{1}{4}$ cm., $u_b = 3\frac{3}{4}$ cm. Znaleźć boki a, b trójkąta 1) za pomocą rachunku; 2) za pomocą konstrukcji.

6. W trójkącie $\triangle ABC$ bok $a = 3$ cm., $b = 5$ cm.; obliczyć długość boku c , jeżeli wiemy, że różnica odcinków, na które dwusieczna wewnętrzna d_C dzieli ten bok, równa się $1\frac{1}{2}$ cm.

7. Obliczyć odcinki, na które bok c trójkąta ABC został podzielony przez obie dwusieczne, poprowadzone z wierzchołka C . Mamy dane $a = 6$ cm., $b = 9$ cm., $c = 12$ cm.

8. Obliczyć promień koła Apollonjusza, które w trójkącie $\triangle ABC$ przechodzi przez wierzchołek A , jeżeli wiemy, że $a = 14$ cm., $b = 7$ cm., $c = 18$ cm.

9. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy dane boki $a = 8$ cm., $c = 10$ cm., oraz warunek, że $\sphericalangle C = 2\sphericalangle A$. Dowieść, że odcinek a jest średni proporcjonalny między bokiem c i odcinkiem u_a , które dwusieczna d_C wyznacza na tym boku. Obliczyć długość tej dwusiecznej oraz długość boku b .

10. W trójkącie $\triangle ABC$ prowadzimy dwusieczną wewnętrzną AA' , poczym kreślimy $A'D \parallel AC$. W jakim wypadku odcinki AD i DB mogą równać się sobie? Kiedy mamy $AD \geq DB$? Kiedy mamy $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$?

10. W poprzednim zadaniu kładziemy $a = 14$ cm., $b = 18$ cm., $c = 10$ cm. Obliczyć długość odcinków $A'D, AD, BD$.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane dwa odcinki m, k oraz

11. c, h_c i warunek, że $a : b = m : k$.

12. c, s_c „ „ „ $a : b = m : k$.

13. c, C i warunek, że $a : b = m : k$.
14. c, h_a „ „ „ $a : b = m : k$.
15. c, R „ „ „ $a : b = m : k$.
16. c, d_c „ „ „ $a : b = m : k$.
17. C, s_a „ „ „ $a : b = m : k$. [Wskazówka: zastosować metodę przekształcenia jednokładnego. Patrz ćwiczenia XXXII, str. 211].
18. c, h_c i warunek, że $a : s_a = m : k$.
19. c, h_c „ „ „ $a : s_c = m : k$.
20. Zbudować trójkąt prostokątny $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = \delta$), mając dane odcinki u_a, u_b .
21. Na prostej dane są trzy punkty A, B, C ; jakie jest miejsce geometryczne punktów X takich, iż $\sphericalangle AXB = \sphericalangle BXC$?
22. Na prostej dane są w porządku wskazanym cztery punkty A, B, C, D ; znaleźć punkt, z którego odcinki AB, BC, CD widać pod równymi kątami.
23. Jakie jest miejsce geometryczne punktów, z których dwa dane koła $(O)r, (O)r'$ widać pod równymi kątami? [Wskazówka: czy na linii środków OO' są punkty, odpowiadające warunkom zadania?].
24. Na danej prostej g znaleźć punkt, z którego dwa dane koła widać pod równymi kątami.
25. Znaleźć punkt, z którego trzy dane koła widać pod równymi kątami.
26. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane u_a, u_b, s_a .

W następnym zadaniu należy uwzględnić własność, dowiedzioną w ćwiczeniu XXXV, 9, str. 225.

27. Na prostej dane są trzy punkty A, B, C . Wyznaczyć na tej prostej takie dwa punkty X_1, X_2 , żeby C był środkiem odcinka X_1, X_2 i żeby się utworzyła czwórka harmoniczna (AB, X_1, X_2) .

28. Dane są dwa odcinki a, b ; umieścić pierwszy z nich na drugim w taki sposób, by końce tych odcinków utworzyły czwórkę punktów harmoniczną.

29. Danym promieniem r zakreślić koło tak, by przeszło ono przez dany punkt A i podzieliło harmonicznie dany odcinek BC .

30. Dana jest czwórka punktów harmoniczna (AB, CD) ; zbudować kwadrat o danym boku a tak, żeby dwie jego przekątne (lub ich przedłużenia) przechodziły przez A i B , proste zaś, łączące środki przeciwległych boków kwadratu, przechodziły przez C i D .

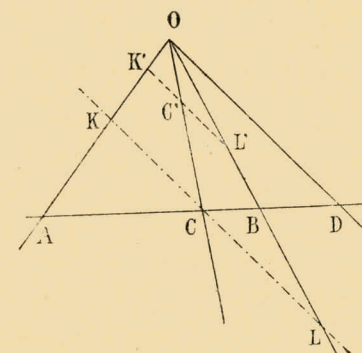
31. Dana jest czwórka punktów harmoniczna (AB, CD) ; zbudować taki romb, by bok jego równał się danemu odcinkowi m , kąt równał się danemu kątowi $\sphericalangle L$ i żeby przekątne przechodziły przez punkty A, B , proste zaś, łączące środki boków przeciwległych, przechodziły przez C i D .

§ 235. Twierdzenie. Jeżeli, mając pęk prostych harmoniczny $O(AB, CD)$ poprowadzimy równoległą do prostej OD , wówczas sprzężona z nią prosta OC podzieli na połowy odcinek tej równoległej, zawarty między prostymi OA, OB .

Wystarczy dowieść twierdzenia w przypadku, gdy równoległa przechodzi przez punkt C , jeśli bowiem $K'L' \parallel KL$ (rys. 200) oraz $CK = CL$ wówczas (zadanie 25, str. 201) musi być $C'K' = C'L'$. Prowadzimy tedy przez punkt C prostą równoległą do OD , na niej odkładamy

$$CK = CL.$$

i dowiedzimy że K leży na prostej OA .



Rys. 200.

Na mocy konstrukcji, podanej w § 224, prosta OK powinna wyznaczyć punkt czwarty harmoniczny względem trzech danych punktów C, D, B . Ale z § 229 wiemy, że istnieje tylko jeden punkt, dzielący wraz z punktem B odcinek CD harmonicznie, z warunków zaś twierdzenia wiemy, że tym punktem jest A . Wobec tego prosta OK musi przechodzić przez A .

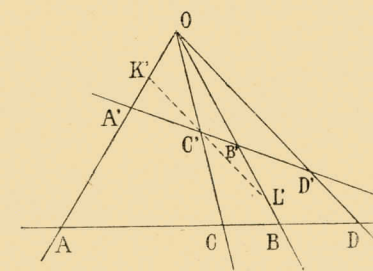
§ 236. Twierdzenie. Przecinając pęk harmoniczny dowolną prostą, otrzymujemy czwórkę harmoniczną punktów.

Niech będzie (AB, CD) czwórka harmoniczna punktów. Łącząc punkty te z dowolnym punktem O , otrzymujemy pęk harmoniczny $O(AB, CD)$. Jeśli teraz przetniemy nasz pęk dowolną prostą m , powiadam, że otrzymamy znów czwórkę harmoniczną punktów $(A'B', C'D')$.

Jakoż przez C' poprowadzimy prostą $K'L' \parallel OD$. Na mocy poprzedniego twierdzenia, musi być

$$C'K' = C'L',$$

ale z konstrukcji, podanej w § 224, wynika, że punkty A', B'



Rys. 201.

dzieli harmonicznie odcinek $C'D'$, mamy więc istotnie czwórkę harmoniczną punktów $(A'B', C'D')$.

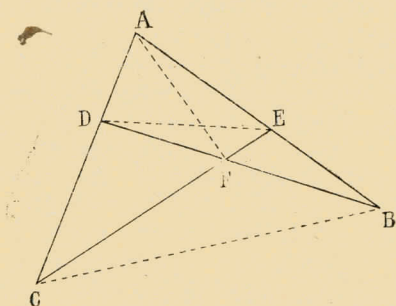
Wniosek. Jeżeli trzy proste wychodzą z jednego punktu, wówczas istnieje jedna i tylko jedna prosta, wychodząca z tego samego punktu i tworząca z tamtymi trzema pęk harmoniczny.

§ 237. Określenie. Czworobokiem zupełnym nazywamy figurę, utworzoną przez cztery proste, przecinające się tak, że żadne trzy z pośród nich nie przechodzą przez jeden punkt.

Np. na rysunku 202 proste AB , AC , DB , EC , tworzą czworobok zupełny.

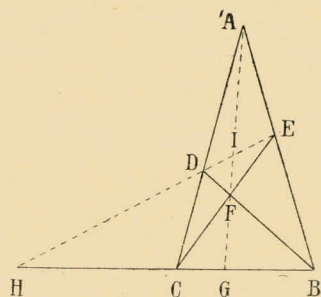
Czworobok zupełny posiada sześć wierzchołków (A , B , C , D , E , F) i trzy przekątne (AF , DE , CB).

Punkty przecięcia się dwóch przekątnych nazywamy punktami przekątnymi czworoboku.



Rys. 202.

§ 238. Twierdzenie. Każde dwie przekątne czworoboku zupełnego dzielą harmonicznie trzecią przekątną.



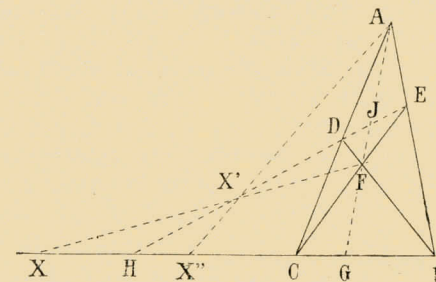
Rys. 203.

Chcemy np. dowieść, że na przekątnej CB tworzy się czwórka harmoniczna (BC, GH) . Na przedłużeniu odcinka BC musi istnieć jeden i tylko jeden punkt X , dzielący wraz z punktem G odcinek ten harmonicznie, czyli musi istnieć na prostej BC czwórka harmoniczna punktów (BC, GX) .

Wyobraźmy sobie, że punkty tej czwórki połączyliśmy z wierzchołkiem F czworoboku; otrzymujemy pęk harmoniczny $F(BC, GX)$. Z twierdzenia § 236 wiemy, że wystarczy przeciąć ten pęk dowolną prostą, aby otrzymać nową czwórkę harmoniczną. Przetnijmy go tedy za pomocą przekątnej DE . Gdyby punkt X nie leżał na przekątnej DE , a więc nie zle-

wał się z punktem H (jak na rysunku 204), wówczas musieliśmybyśmy otrzymać czwórkę harmoniczną (DE, JX') . Łącząc punkty tej czwórki z wierzchołkiem A czworoboku, otrzymalibyśmy pęk harmoniczny $A(DE, JX')$, a przecinając ten nowy pęk za pomocą przekątnej BC , otrzymalibyśmy na tej prostej czwórkę harmoniczną (BC, GX'') .

W ten sposób istniałyby na prostej BC dwa punkty X , X'' , dzielące wraz z punktem G odcinek BC harmonicznie, co jest niedorzeczne, gdyż przeczy badaniu, przeprowadzonemu w § 228—229.



Rys. 204.

Ćwiczenia XXXVII. 1. Jeżeli przez środek równoległoboku wykreślimy równoległe do jego boków, otrzymamy pęk harmoniczny.

2. Jeżeli w pęku harmonicznym dwie sprzężone z sobą proste są do siebie prostopadłe, wówczas są one dwusiecznymi kątów, utworzonych przez dwie drugie proste pęki.

3. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ poprowadzimy wysokości AA' , BB' , CC' i wykreślimy t. zw. trójkąt spodkowy $\triangle A'B'C'$, otrzymamy w każdym wierzchołku nowego trójkąta pęk harmoniczny.

3a. Na rysunku, odpowiadającym poprzedniemu zadaniu, dowieść, że wierzchołki trójkąta B , C , spodek wysokości A' i punkt X , w którym prosta $B'C'$ przecina bok BC , tworzą czwórkę punktów harmoniczną.

3b. Na zasadzie poprzedniego zadania dowieść, że trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

4. Wykazać, że trzy wierzchołki czworoboku zupełnego, leżące na jednym jego boku, oraz punkt przecięcia się tego boku z prostą, łączącą którykolwiek czwarty wierzchołek z punktem przekątnym, tworzą czwórkę punktów harmoniczną.

5. Wykreślić czworobok zupełny, mając dane trzy jego punkty przekątne i jeden wierzchołek.

6. Na prostej m mamy dane trzy punkty A, B, C ; posługując się wyłącznie linijalem i opierając się na § 238, zbudować punkt czwarty harmoniczny.

7. Na odcinku AB mamy dany punkt C ; zbudować punkt czwarty harmoniczny, nie kreśląc przedłużenia odcinka AB .

8. Wykazać, że twierdzenie § 238 jest uogólnieniem twierdzenia, iż przekątne równoległoboku dzielą się na połowy.

9. Dane są trzy proste a, b, c , przecinające się w punkcie niedostępnym; wykreślić czwartą prostą, tworzącą z nimi pęk harmoniczny.

10. Mamy dane dwie czwórki harmoniczne (AB, CD) , $(AB', C'D')$, leżące na dwóch różnych prostych, lecz mające punkt wspólny A ; gdzie znajduje się punkt przecięcia prostych CD' i $C'D$?, prostych CC' , DD' ?

11. Dwa pęki harmoniczne $O(ab, cd)$, $O'(ab', c'd')$ mają wspólną prostą a . Jak leżą względem siebie punkty przecięcia się prostych: b z b' , c z c' , d z d' , c z d' , d z c' ?

12. Zbudować pęk harmoniczny, mając daną jedną prostą pęku oraz warunek, by trzy pozostałe proste tego pęku przechodziły przez trzy dane punkty K, L, M , nie leżące na jednej prostej.

13. Dane są punkty A, B, C, D , nie leżące na jednej prostej; wykreślić pęk harmoniczny tak, by proste pęku przechodziły odpowiednio przez A, B, C i D .

14. Dane są cztery proste a, b, c, d , nie przechodzące przez jeden punkt; przeciąć je piątą prostą tak, by otrzymać czwórkę punktów harmoniczną.

15. Jeżeli proste m, n , wychodzące z punktu A , przetniemy pękiem dowolnych prostych, wychodzących z punktu B , otrzymamy szereg czworoboków (zwyczajnych), których przekątne przecinają się wszystkie na jednej prostej. Prosta ta tworzy pęk harmoniczny z prostymi m, n i z prostą AB .

16. Proste dane a, b przecinają się w niedostępnym punkcie M przez dany punkt C poprowadzić prostą CM , posługując się tylko liniałem.

17. Proste a, b są równoległe; przez dany punkt C poprowadzić trzecią równoległą, posługując się tylko liniałem. Czy zachodzi jaki związek między tym zadaniem a poprzednim?

18. Dane są dwa punkty A, B , których nie chcemy lub nie możemy połączyć zapomocą prostej (np. dla tego, że pomiędzy punktami znajduje się przeszkoda); znaleźć punkt przecięcia się prostej AB z daną prostą m .

19. Koło, przechodzące przez punkty przekątne czworoboku zupełnego, przecina pod kątem prostym wszystkie trzy koła, wykreślone na przekątnych tego czworoboku, jako na średnicach. *)

*) Czytelnikom, którzyby chcieli zapoznać się bliżej z licznymi i pięknymi zastosowaniami podziału harmonicznego i teorii biegunowych (omówionej w rozdziale następnym) polecamy dwie prace w języku polskim:

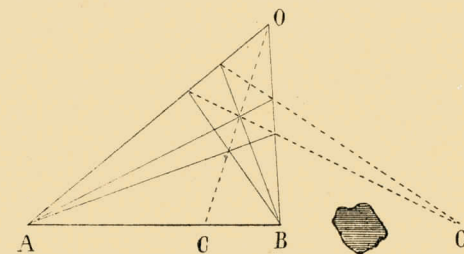
Jakób Steiner. *Konstrukcje geometryczne wykonane zapomocą linii prostej i stałego koła.* Przełożył St. Kwiecieński. Warszawa, 1915.

M. A. Baraniecki. *Początkowy wykład syntetyczny własności przecięć słózkowych na podstawie ich pokrewieństwa harmonicznego z kołem.* Warszawa, 1885.

ĆWICZENIA Z GEOMETRII PRAKTYCZNEJ.

Opierając się na teorii jednokładności, a zwłaszcza na własnościach czworoboku zupełnego i posługując się tylko najprostszymi przyrządami, o których była mowa na str. 111, można podać nowe rozwiązania zadań, omówionych na str. 111—112, jak również rozwiązać niektóre nowe zadania.

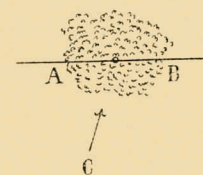
1. Posługując się tylko wytykaniem linii prostych (a więc nie posługując się węgielnicą) przedłużyć prostą AB poza przeszkodę. [Wskazówka: zadanie sprowadza się do wyznaczenia, po drugiej stronie przeszkody dwóch punktów, leżących na prostej AB . Rysunek 205 podaje sposób wyznaczenia jednego z tych punktów].



Rys. 205.

2. To samo zadanie rozwiązać zapomocą trójkątów jednokładnych (a więc posługując się węgielnicą).

3. Droga AB przechodzi przez las; z punktu C wytknąć drogę, przecinającą AB w jej punkcie środkowym, posługując się przy tym własnościami trójkątów jednokładnych (rys. 206).



Rys. 206

4. Mamy dane punkty A, A' oraz B, B' niedostępne, lecz widzialne zdaleka. Przez dany punkt K (dostępny) wytknąć prostą, która przechodziła również przez punkt przecięcia się prostych AA', BB' .

5. Mamy dane dwa punkty niedostępne A, B , widzialne zdaleka, lecz położone tak, że prosta AB jest w całości swej niedostępna. Przez dany punkt (dostępny) K poprowadzić równoległą do prostej AB , opierając się na przekształceniu jednokładnym.

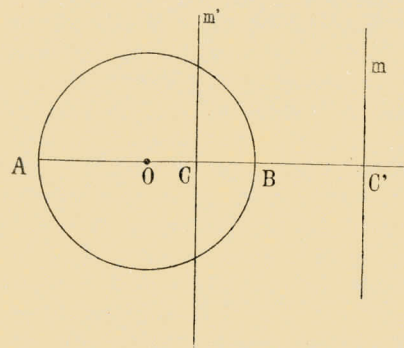
6. Rozwiązać to samo zadanie, opierając się na własnościach ortocentru i czworoboku zupełnego.

ROZDZIAŁ VI.

O biegunach i biegunowych względem koła.

§ 239. **Określenie.** Niech będzie dane koło $(O)r$ i w nim średnica AB . Jeżeli punkty C, C' dzielą tę średnicę harmonicznie i jeżeli

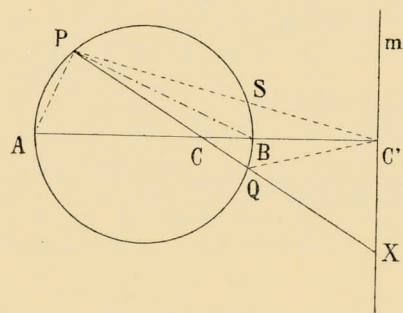
w punktach tych wystawiliśmy prostopadłe m, m' do średnicy, wówczas punkt C nazywa się *biegunem* prostej m względem danego koła, prosta zaś m nazywa się *biegunową* punktu C . Tak samo, oczywiście, punkt C' jest *biegunem* prostej m' , ta zaś jest *biegunową* punktu C' względem danego koła (O)r.



Rys. 207.

Jeżeli punkt C zbliża się do B , wówczas harmonicznie sprzężony z nim punkt C' oraz biegunowa m zbliżają się z drugiej strony do tegoż punktu B (§ 228); jeżeli C zlewa się z B , wówczas i C' zlewa się z tym samym punktem B , biegunowa zaś m staje się styczną do koła. Jeżeli, przeciwnie, C zbliża się do środka koła O , wówczas C' , a wraz z nim biegunowa m oddalają się nieograniczenie. Gdy C zlewa się ze środkiem O , punkt C' staje się punktem niewłaściwym, biegunowa zaś m staje się prostą niewłaściwą.

§ 240. Twierdzenie. Jeżeli z punktu danego C poprowadziliśmy do koła dowolną sieczną, na której koło wyznacza cięciwę PQ , wówczas punkt X , stanowiący wraz z punktami P, Q, C czwórkę harmoniczną (PQ, CX), leży na biegunowej punktu C .



Rys. 208.

sobie dwa łuki:

$$\widehat{QB} = \widehat{SB}.$$

Wynika stąd, że punkty S, Q są z sobą symetryczne względem średnicy AB , albo innymi słowami: że prosta AC' jest dwusieczną kąta $\angle SC'Q$.

Jeśli teraz zwrócimy uwagę na to, że biegunowa m jest prostopadła do tej samej prostej AC' , wówczas dojdziemy do wniosku, iż

Jeżeli mamy czwórkę harmoniczną punktów (AB, CC'), wówczas pęk prostych $P, (AB, CC')$ musi być pękiem harmonicznym. W pęku tym dwie proste, mianowicie AP i PB są do siebie prostopadłe (dlaczego?), muszą więc one być dwusiecznymi (wewnętrzną i zewnętrzną) kąta $\angle CPC'$, czyli że mamy

$$\angle QPB = \angle BPS,$$

a ponieważ oba te kąty są wpisane, zatem muszą równać się

proste $C'P, C'Q$ tworzą pęk harmoniczny z prostymi m oraz $C'A$. Otóż przecinając ten pęk za pomocą prostej PC , otrzymamy na niej czwórkę punktów harmoniczną (PQ, CX).

§ 241. Twierdzenie odwrotne (względem § 240). Jeżeli mamy dany punkt C i jego biegunową m względem koła (O)r i jeżeli dowolny punkt X biegunowej połączymy z punktem C , przyczym prosta CX przecina koło w punktach PQ , wówczas otrzymaliśmy czwórkę harmoniczną punktów (PQ, CX).

Dowód przez sprowadzenie do niedorzeczności.

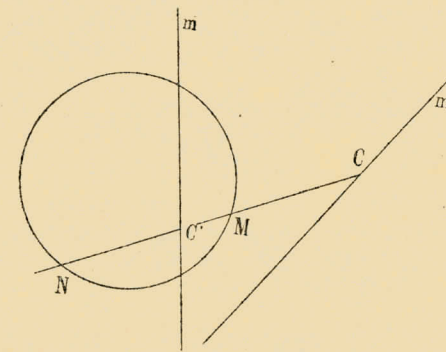
§ 242. Posługując się pojęciem miejsca geometrycznego, można dwa powyższe twierdzenia ująć w jedno:

Biegunowa punktu C względem danego koła jest miejscem geometrycznym punktów X , które wraz z punktem C dzielą harmonicznie cięciwy, wyznaczone przez to koło na wszystkich siecznych, wychodzących z punktu C .

§ 243. Twierdzenie. Jeżeli mamy dane dwa punkty C, C' , przyczym punkt C leży na biegunowej punktu C' , wówczas i odwrotnie: punkt C' musi leżeć na biegunowej punktu C .

Niech prosta m' będzie biegunową punktu C' względem danego koła. Połączmy C z C' i niech prosta CC' przecina koło w punktach M, N .

Ponieważ C leży na biegunowej punktu C' , zatem, na mocy poprzedniego twierdzenia, ($MN, C'C$) musi być czwórką punktów harmoniczną. Ale na mocy tego samego twierdzenia biegunowa m punktu C jest miejscem geometrycznym punktów, dzielących wraz z punktem C harmonicznie wszystkie cięciwy takie, jak MN ; wobec tego punkt C' musi leżeć na m czyli na biegunowej punktu C .



Rys. 209.

§ 244. Wniosek 1. Jeżeli punkty $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ leżą na jednej prostej m , wówczas biegunowe ich przechodzą przez jeden punkt, mianowicie przez biegun prostej m .*)

*) Tę samą prawdę wyrażają niekiedy słowami: jeżeli punkt A porusza się po prostej m , wówczas jego biegunowa obraca się dookoła stałego punktu, a mianowicie dookoła bieguna prostej m .

11. W czworoboku wpisanym punkt przecięcia się przekątnych jest biegunem prostej, łączącej punkty przecięcia się boków przeciwległych.

12. Jeżeli w czworoboku wpisanym przedłużyliśmy boki tak, iż powstał czworobok zupełny, wówczas

a) średnica, przechodząca przez punkt przekątny, jest prostopadła do prostej, łączącej dwa pozostałe punkty przekątne;

b) każda przekątna przecina koło w punktach styczności stycznych, poprowadzonych z trzeciego punktu przekątnego.

13. Mamy daną: prostą m i punkt M , nie leżący na niej. Zbudować koło tak, by prosta m była biegunową punktu M względem tego koła i żeby

a) środek koła leżał na danej prostej K . [Wskazówka: środek koła wyznaczamy jako punkt przecięcia się dwóch prostych, poczym promień znajdujemy, jako odcinek średni proporcjonalny;

b) okrąg przechodził przez dany punkt A .

c) promień równał się danemu odcinkowi;

d) koło było styczne do danej prostej a . [Wskazówka: najpierw buduje my prostą, tworzącą z trzema danymi pęk harmoniczny].

14. Dane jest koło oraz punkt A wewnątrz niego i prosta m , nie przecinająca koła. Wyznaczyć:

a) taki punkt na prostej m , by jego biegunowa przeszła przez A ;

b) taką prostą, przechodzącą przez A , by jej biegun leżał na prostej m .

15. Dane jest koło, punkt M i prosta a ; połączyć M z takim punktem X na prostej a , żeby odcinek MX został podzielony harmonicznie przez dane koło.

16. Dane są dwa koła $(O)r$ i $(O')r'$ i punkt A na pierwszym z nich. Poprowadzić w kole $(O)r$ cięciwę tak, by przeszła ona przez A i została podzielona harmonicznie przez koło $(O')r'$.

17. Dane są dwa punkty A, A' i koło $(O)r$. Przez A poprowadzić sieczną do koła, przecinającą okrąg w takich punktach X, Y , że $PX : PY = P'X : P'Y$. [Wskazówka do analizy: jeżeli z A wystawimy prostopadłą do prostej AA' , wówczas punkt jej przecięcia się z prostą XY leży na biegunowej punktu A'].

18. Dany jest czworobok $ABCD$ oraz punkt E . Wykreślić takie koło, przechodzące przez E , żeby biegunowe punktów A, B, C, D względem tego koła tworzyły równoległobok. [Wskazówka do analizy: biegunowe punktów A, C mają być do siebie równoległe, a więc prostopadłe do tej samej średnicy, która winna leżeć na prostej AC].

§ 246. Jeżeli między dwiema figurami zachodzi taki związek, jak między czworobokiem $ABCD$ i równoległobokiem w zadaniu po-

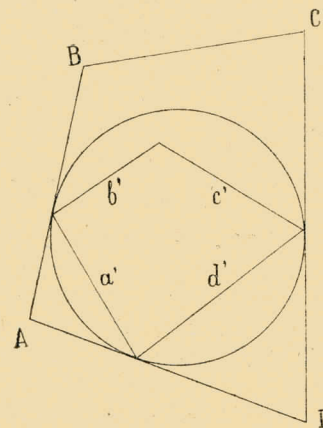
przednim, wówczas dwie te figury nazywamy *biegunowo wzajemnymi* względem danego koła. Mamy tedy następujące

Określenie. Dwa wielokąty nazywamy *biegunowo wzajemnymi* względem danego koła, jeżeli wierzchołki pierwszego wielokąta są biegunami boków drugiego, i nawzajem wierzchołki drugiego są biegunami boków pierwszego.

Koło dane nazywają często *kołem kierowniczym* figur *biegunowo wzajemnych*.

Twierdzenie. Mając dany dowolny wielokąt W i koło O , możemy zawsze zbudować wielokąt W' , biegunowo z nim wzajemny względem tego koła i mający taką samą liczbę boków, jak wielokąt W .

Istotnie niech $ABCD$ będzie danym wielokątem W . Biegunowe wierzchołków A, B, C, D oznaczmy przez a', b', c', d' . Punkt (a', b') , w którym przecinają się proste a', b' , musi być biegunem prostej AB (dlaczego?). Tak samo punkt (b', c') musi być biegunem prostej BC , i t. d.



Rys. 212.

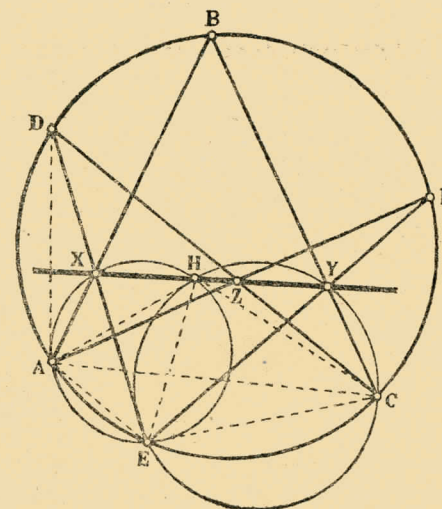
§ 247. Pojęcie figur biegunowo wzajemnych oddać nam może duże usługi, gdyż z twierdzeń, w których mowa o pewnych własnościach punktów, można wysnuć bezpośrednio twierdzenia, dotyczące odpowiednich własności linii prostych. Zrozumiemy to najlepiej na przykładzie dwóch następujących twierdzeń.

Twierdzenie Pascala.

W każdym sześciokącie wpisanym (wklęsłym czy wypukłym) trzy punkty przecięcia się trzech par przeciwległych boków leżą na jednej prostej.

Niech będzie dany sześciokąt wpisany $ABCDEF$ (na rys. 213 mamy sześciokąt wklęsły). Mamy dowieść, że punkty X, Y, Z leżą na jednej linii prostej. W tym celu opiszmy koła na trójkątach $\triangle AXE, \triangle EYC$ i oznaczmy literą H ich punkt przecięcia się.

Ponieważ



Rys. 213.

$$\cup AE + \cup EC = \cup AC$$

$$\cup DB + \cup BF = \cup DF,$$

zatem $\sphericalangle AZC = \sphericalangle AXE + \sphericalangle EYC$,

ze względu zaś na to, że

$$\sphericalangle AXE = \sphericalangle AHE, \sphericalangle EYC = \sphericalangle EHC,$$

musi być

$$\sphericalangle AZC = \sphericalangle AHC,$$

czyli czworobok $AHZN$ musi być wpisany w koło.

Mamy tedy trzy czworoboki wpisane: $AHZN$, $AXHE$, $EHYC$, z których wynika, że

$$\sphericalangle XHE \text{ spełnia się z kątem } \sphericalangle XAE,$$

$$\sphericalangle EHY \text{ „ „ „ „ } \sphericalangle ECY,$$

$$\sphericalangle XAE \text{ „ „ „ „ } \sphericalangle ECY,$$

a więc

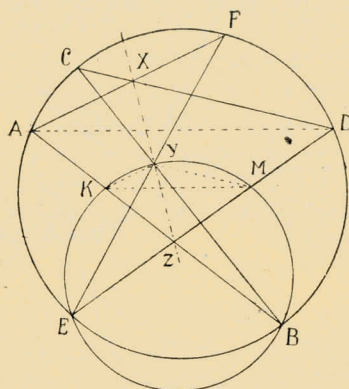
$$\sphericalangle XHE \text{ „ „ „ „ } \sphericalangle EHY$$

i, co za tym idzie, punkty X , H , Y leżą na jednej prostej.

W taki sam sposób uczeń dowiedzie, że H , Z , Y leżą na jednej prostej, a więc punkty X , Y , Z leżą na jednej prostej.*)

§ 248. Poprowadźmy teraz styczne a , b , c , d , e , f przez wierzchołki sześciokąta wpisanego. Otrzymamy sześciokąt opisany, biegunowo wzajemny z wpisanym. Wierzchołki przeciwległe no wego sześciokąta np. (a, b) , (d, e) są biegunami boków przeciwległych (AB, ED) sześciokąta wpisanego, wobec czego przekątne łączące te wierzchołki muszą być odpowiednio biegunowymi punktów X , Y , Z poprzedniego twierdzenia. Ponieważ według twierdzenia Pascala punkty X , Y , Z leżą na jednej prostej, zatem biegunowe tych punktów (czyli przekątne sześciokąta opisanego) przecinają się w jednym punkcie, który jest biegunem prostej XYZ . Mamy tedy następujące

Twierdzenie Brianchona. Przekątne każdego sześciokąta opisanego na kole przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 214.

*) Jeszcze prostszy dowód twierdzenia Pascala oprócz można na własności trójkątów jednokładnych. Niech będzie (rys. 214) $ABCDEF$ sześciokąt wpisany. Na trójkącie $\triangle BEY$ opisujemy koło. Trójkąty $\triangle AXD$ oraz $\triangle KYM$ mają boki odpowiednio równoległe (dlaczego?), a ponieważ proste AK , DM przecinają się w punkcie Z , zatem prosta XY musi przejść przez ten sam punkt, który jest środkiem jednokładności obu trójkątów.

Ćwiczenia XXXIX. 1. Z twierdzeń Pascala i Brianchona otrzymujemy szereg twierdzeń o pięciokątach, czworokątach i trójkątach, zakładając, że dwa, trzy lub cztery wierzchołki sześciokąta zlewają się z sobą. Jeżeli np. w sześciokącie wpisanym $ABCDEF$ wierzchołek B zlał się z wierzchołkiem A , wówczas zamiast sześciokąta mamy pięciokąt, przyczem możemy uważać, że styczna w punkcie A zastąpiła bok AB , wobec czego otrzymujemy twierdzenie:

w pięciokącie wpisanym $ACDEF$ punkty przecięcia się dwóch par boków AF , CD oraz AC , EF leżą na jednej prostej z punktem, w którym piąty bok DE przecina styczną, poprowadzoną przez przeciwległy wierzchołek A .*)

2. W pięciokącie opisanym przekątne, łączące dwie którekolwiek pary wierzchołków niesąsiednich, przecinają się w jednym punkcie z prostą, która łączy piąty wierzchołek z punktem styczności boku przeciwległego.

3. W czworoboku wpisanym punkty przecięcia się przeciwległych boków leżą na jednej prostej z punktami przecięcia się stycznych, poprowadzonych przez przeciwległe wierzchołki.

4. W czworoboku opisanym proste, które łączą punkty styczności boków przeciwległych, przecinają się w tym samym punkcie, co i przekątne.

5. W trójkącie wpisanym punkty przecięcia się boków ze stycznymi, poprowadzonymi przez wierzchołki przeciwległe, leżą na jednej prostej.

6. W trójkącie opisanym na kole, proste, łączące wierzchołki z punktami styczności boków przeciwległych, przecinają się w jednym punkcie (t. zw. *punkt Gergonne'a*).

7. Jeżeli przez wierzchołki czworoboku wpisanego (zwyčajnego) poprowadzimy styczne, utworzymy w ten sposób czworobok opisany (zwyčajny). Jeżeli następnie przedłużymy przeciwległe boki tych czworoboków tak, by powstały z nich dwa czworoboki zupełne, wówczas na każdej przekątnej pierwszego czworoboku leżeć muszą dwa punkty przekątne drugiego czworoboku (opisanego).

8. Z poprzedniego zadania wysnuć wniosek, że przekątne czworoboku (zupełnego) opisanego przecinają się po dwie w punktach przekątnych czworoboku wpisanego.

9. Z własności ortocentru wysnuć następujące twierdzenie, opierając się na teorii biegunowych: jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ z pun-

*) W zadaniach 1—4 czytelnik zastanowi się, czy twierdzenia pozostają prawdziwe, jeżeli mamy jedną lub dwie pary boków równoległych.

ktu H poprowadzimy proste HA , HB , HC oraz prostopadłe do nich proste, wówczas punkty M , N , P , w których te prostopadłe przecinają boki trójkąta, muszą leżeć na jednej prostej.

10. W trójkącie rozwartokątnym ortocentr jest środkiem koła, względem którego trójkąt jest sam z sobą biegunowo sprzężony (t. j. wierzchołki są biegunami przeciwległych boków).

KSIEGA IV.

O mierzeniu figur płaskich.

ROZDZIAŁ I.

O mierzeniu odcinków, kątów i wielokątów.

§ 249. Niech będą dane dwa odcinki **spółmierne** a i b i niech będzie $a < b$. Jeżeli odcinek a spróbujemy odkładać na odcinku b , wówczas może się zdarzyć, że a zawierać się będzie w odcinku b dokładnie m razy, gdzie m jest liczbą całkowitą.

Mamy wówczas

$$ma = b,$$

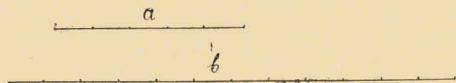
jeżeli zaś a przyjmiemy za *jednostkę miary*, wówczas możemy napisać

$$a = 1 \text{ oraz } b = m.$$

Liczbę m nazywamy *miarą długości* albo po prostu *długością* odcinka b .

Może się jednak zdarzyć, iż odcinek a nie mieści się—jak to mówią—w odcinku b czyli że ilekolwiek razy odłożymy na prostej odcinek a , nigdy nie otrzymamy odcinka równającego się b : wynik będzie zawsze albo za mały, albo za duży. Ponieważ jednak odcinki a , b są według naszego założenia **spółmierne**, t. j. posiadają **spólną miarę**, istnieje więc taka liczba k , że jeśli podzielimy a na k części rów-

nych, wówczas taka częśćka będzie się dokładnie „mieścić“ w odcinku **b**. Innymi słowami: odkładając na prostej dostateczną ilość razy $\frac{1}{k}$ -tą część odcinka **a**, otrzymamy odcinek równający się **b**.



Rys. 215.

Przypuśćmy, że, chcąc otrzymać odcinek równający się **b**, musieliśmy s razy odłożyć $\frac{1}{k}$ -tą część odcinka **a**. W takim razie piszemy

$$\frac{s}{k} a = b,$$

jeśli zaś **a** obierzemy jako *jednostkę miary*, wówczas możemy napisać

$$a = 1 \text{ oraz } b = \frac{s}{k}.$$

Liczbę $\frac{s}{k}$ nazywamy miarą długości odcinka **b**. Na rys. 215

liczba $\frac{s}{k}$ równa się $\frac{12}{5}$.

§ 250. Jak widzimy, jeżeli odcinek **b** jest spółmierny z obraną jednostką miary, wówczas istnieje zawsze liczba (całkowita lub ułamkowa), będąca miarą długości odcinka **b**.

I odwrotnie: jeżeli mamy daną jednostkę miary **a** i liczbę $\frac{s}{k}$, wówczas istnieje odcinek **b**, którego miarą długości — przy danej jednostce — jest liczba $\frac{s}{k}$.

Istotnie, aby odnaleźć odcinek **b**, wystarczy podzielić jednostkę miary **a** na k części równych i odłożyć na prostej s takich części.

§ 251. Nieco inaczej przedstawia się sprawa, jeżeli odcinek **b** jest niespółmierny z odcinkiem **a**, który obraliśmy jako jednostkę miary.

Na ilekolwiek równych części podzielimy teraz jednostkę **a**, nigdy przez odkładanie tych części nie otrzymamy odcinka **b**. Innymi słowy: niepodobna znaleźć liczby całkowitej ani ułamkowej $\frac{s}{k}$, która byłaby miarą odcinka **b**, jeżeli za jednostkę miary obraliśmy *niespółmierny* z nim odcinek **a**.

Z drugiej strony intuicja powiada nam, iż każdy odcinek powinien mieć oznaczoną długość, oznaczoną miarę. Aby wybrnąć z tej trudności, możemy postąpić w sposób następujący.

Każdy odcinek **m**, *spółmierny z jednostką*, musi być albo mniejszy albo większy od **b**. Możemy tedy wszystkie odcinki wymierne (t. j. takie, których miary są liczbami wymiernymi) podzielić na dwie klasy: do „niższej“ klasy zaliczyć możemy wszystkie odcinki mniejsze od **b**, do „wyższej“ zaś wszystkie od **b** większe.

Podział ten posiada następujące własności:

(1) *Każdy odcinek wymierny należy bądź do jednej, bądź do drugiej klasy;*

(2) *Każdy odcinek klasy niższej jest mniejszy od jakiegokolwiek odcinka klasy wyższej;*

(3) *W klasie niższej nie ma odcinka największego, w klasie wyższej zaś nie ma najmniejszego.*

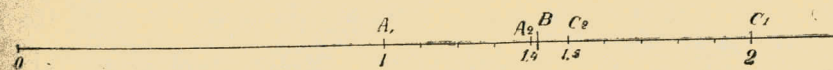
Pierwsze dwie własności są oczywiste, co zaś do trzeciej, to najlepiej wyjaśnimy ją na przykładzie.

Niech będą dane dwa odcinki niespółmierne **a**, **b**, przy czym odcinek **a** obieramy jako jednostkę miary.

Wyobraźmy sobie, iż odcinek **a** odkładamy na odcinku **b** i że „mieści się“ on tylko raz jeden, przyczym pozostaje pewna reszta. Mamy tedy

$$1. a < b < 2. a.$$

Jeżeli mamy, jak na rys. 216, $a = OA_1$, $2a = OC_1$, $b = OB$, wówczas punkt **B** leżeć musi pomiędzy punktami A_1 i C_1 . Podzielmy A_1C_1 na dowolną ilość równych części, np. na 10



Rys. 216.

części. Rzecz jasna, że punkt B musi leżeć na jednym z tych odcinków cząstkowych. Jeżeli np. B leży na piątym odcinku, rachując od A_1 (jak na rysunku), wówczas mamy

$$1,4. a < b < 1,5. a.$$

Niech A_2 i C_2 będą końcami przedziału, na którym leży punkt B . Podzielmy odcinek A_2C_2 na 10 części równych. Na jednej z nich musi znajdować się punkt B ; przypuśćmy, że leży on na drugiej, rachując od punktu A_2 . Jeżeli końce tego drugiego przedziału oznaczymy przez A_3 i C_3 , tak iż punkt B leży na odcinku A_3C_3 , w takim razie mamy

$$OA_3 = 1,41. a ; OC_3 = 1,42. a,$$

zatem $1,41. a < b < 1,42. a.$

Z kolei dzielimy A_3C_3 na 10 części równych. Jeżeli punkt B leży w piątym przedziale, rachując od punktu A_3 , i jeżeli końce tego piątego przedziału oznaczymy przez A_4 i C_4 , w takim razie musi być

$$OA_4 = 1,414. a, OC_4 = 1,415. a,$$

oraz $1,414. a < b < 1,415. a.$

Dzieląc odcinek A_4C_4 na 10 części równych, otrzymamy jeszcze mniejsze przedziały. Niech B leży na trzecim z nich, rachując od punktu A_4 , i niech końcami tego przedziału będą punkty A_5 , C_5 . W takim razie

$$OA_5 = 1,4142. a, OC_5 = 1,4143. a$$

oraz $1,4142. a < b < 1,4143. a.$

I t. d.

Rzecz jasna, że takie postępowanie możemy ciągnąć do nieskończoności: żaden punkt podziału nie może upaść na punkt B , gdyż odcinek OB jest niespółmierny z obraną przez nas jednostką miary.

Mamy tedy dwa nieskończone ciągi odcinków: jeden składa się z odcinków

$$1. a; 1,4. a; 1,41. a; 1,414. a; 1,4142. a; \dots$$

drugi z odcinków

$$2. a; 1,5. a; 1,42. a; 1,415. a; 1,4143. a; \dots$$

Odcinki pierwszego ciągu rosną, pozostają jednak mniejsze od odcinka b ; odcinki drugiego ciągu maleją, pozostają

jednak większe od b . Tak więc pierwszy ciąg należy do klasy „niższej“, drugi zaś do klasy „wyższej“. Prócz tego jest rzeczą oczywistą, że postępując dalej w sposób powyżej wskazany, możemy znaleźć taki odcinek pierwszego ciągu OA_n i taki odcinek drugiego ciągu OC_n , że różnica między nimi (t. j. odległość punktu A_n od punktu C_n) będzie tak mała, jak się nam podoba.

Teraz łatwo już okazać, że

w klasie niższej nie ma odcinka największego, w klasie zaś wyższej nie ma najmniejszego.

Jakoż, gdyby np. istniał w klasie niższej odcinek największy OA_k , to nigdy różnica między odcinkami dwóch naszych ciągów nie mogłaby stać się mniejsza od odcinka $A_k B$, co jest sprzeczne z poprzednimi rozważaniami.*)



Rys. 217.

§ 252. Jeżeli w powyższych wywodach uwzględnimy, że odcinek a jest jednostką miary, wówczas w całym naszym rozumowaniu będziemy mogli wyrazić: „odcinek spółmierny z odcinkiem a “ zastąpić przez wyrazy: „liczba wymierna“.

W szczególności będziemy mogli powiedzieć, że wszystkie liczby wymierne podzieliśmy na dwie klasy: na takie, które są miarami odcinków mniejszych od b (klasa niższa), i na takie, które są miarami odcinków od b większych (klasa wyższa). Podział taki liczb wymiernych na dwie klasy nazywają zwykle **przekrojem w dziedzinie liczb wymiernych**.

Przekrój posiada następujące własności:

- (1) każda liczba wymierna należy bądź do niższej klasy, bądź do wyższej;
- (2) każda klasa zawiera nieskończenie wiele liczb;
- (3) każda liczba klasy niższej jest mniejsza od jakiegokolwiek liczby klasy wyższej;

*) Wyobraźmy sobie, że końce odcinków niższej klasy (czyli punkty $A_1, A_2, \dots$) zaznaczyliśmy barwą czerwoną, końce zaś odcinków klasy wyższej (czyli punkty $C_1, C_2, C_3, \dots$) zaznaczyliśmy barwą niebieską; gdyby istniał w klasie niższej odcinek największy OA_k , wówczas istniałby odcinek $A_k B$, na którym nie byłoby ani czerwonych, ani niebieskich punktów. Wobec tego odległość między punktami czerwonymi i niebieskimi nie mogłaby stać się mniejsza od odcinka $A_k B$.

(4) w klasie niższej niema liczby największej, w klasie zaś wyższej niema liczby najmniejszej.

O takim przekroju powiadamy, że wyznacza on nową liczbę, zwaną **liczbą niewymierną**, i tę liczbę niewymierną uważamy za miarę odcinka **b**, niespółmiernego z jednostką miary.

§ 253. Każdej liczbie wymiernej odpowiada również przekrój (czyli podział liczb na dwie klasy), bardzo podobny do poprzedniego. Istotnie, mając np. daną liczbę 7, możemy wszystkie pozostałe liczby wymierne podzielić na dwie klasy: na liczby mniejsze od 7 i na liczby większe od 7.

Podział ten, jak łatwo przekonać się można, posiada własności (2), (3) i (4) przekroju poprzedniego, natomiast co do własności (1), to podlega ona pewnemu ograniczeniu, mianowicie: każda liczba wymierna z *wyjątkiem* liczby 7 należy bądź do klasy niższej, bądź do wyższej.

§ 254. Uwaga. Rzecz jasna, że prócz powyższych czterech własności przekrój (czyli podział na dwie klasy) liczb wymiernych posiada inne jeszcze własności, wynikające z powyższych.

Np. z rozważań § 251 widzimy, że w klasie niższej można znaleźć taką liczbę a_n , w wyższej zaś taką liczbę c_n , iż różnica $c_n - a_n$ będzie dowolnie mała. Na tym spostrzeżeniu polega t. zw. „przybliżone” obliczanie długości odcinka niewymiernego. Chodzi w takich razach o to, że mając dany odcinek niespółmierny z jednostką miary, zastępujemy go odcinkiem wymiernym, dostatecznie mało różniącym się od niego.

§ 255. W § 250 mówiliśmy, że zachodzą dwa twierdzenia:

(1) każdy odcinek spółmierny z jednostką posiada miarę, która jest liczbą wymierną;

(2) każdą liczbę wymierną możemy uważać za miarę jakiegoś odcinka, spółmiernego z daną jednostką.

Co się tyczy odcinków niespółmiernych z jednostką, to w § 252 ustaliliśmy już coś analogicznego do twierdzenia (1), mianowicie ustaliliśmy pojęcia miary takiego odcinka. Powstaje teraz pytanie, czy znajdziemy również coś analogicznego do twierdzenia (2), czyli zachodzi pytanie:

czy każdą liczbę niewymierną możemy uważać za miarę jakiegoś odcinka?

Chcąc na to odpowiedzieć, weźmy przykład konkretny. Niech będzie dana liczba niewymierna $\sqrt{7}$. Jest ona wy-

znaczona przez pewien przekrój w dziedzinie liczb wymiernych czyli przez pewien sposób ukłasyfikowania tych liczb. Możemy mianowicie zaliczyć do klasy niższej te liczby wymierne, których kwadraty są od 7 mniejsze, do wyższej zaś te, których kwadraty są większe od 7.

Stosując do liczby $\sqrt{7}$ znany sposób wyciągania pierwiastka kwadratowego, możemy z klasy niższej wybrać liczby, które tworzą ciąg rosnący, mianowicie:

$$2; 2,6; 2,64; 2,645; 2,6457; \dots$$

Tak samo z klasy wyższej możemy wybrać ciąg malejący

$$3; 2,7; 2,65; 2,646; 2,6458; \dots$$

Różnica między wyrazami tych dwu ciągów maleje nieograniczenie.

Obierzmy teraz dowolną prostą, na niej punkt O i po ustaleniu jednostki miary a odłóżmy na naszej prostej ciąg nieskończony odcinków:

$$OA_1 = 2; OA_2 = 2,6; OA_3 = 2,64; OA_4 = 2,645; \dots$$

oraz drugi nieskończony ciąg

$$OC_1 = 3; OC_2 = 2,7; OC_3 = 2,65; OC_4 = 2,646; \dots$$

Otrzymamy w ten sposób dwa ciągi punktów, które posiadają następujące własności:

1) punkty $A_1, A_2, A_3, \dots$ leżą coraz dalej w prawo, punkty zaś $C_1, C_2, C_3, \dots$ leżą coraz dalej w lewo, niemniej jednak wszystkie punkty A leżą w lewo od punktów C ;

2) punkty A zbliżają się nieograniczenie do punktów C , tak iż jeśli nam kto zada dowolnie mały odcinek ϵ , potrafimy znaleźć taki punkt A_n i taki punkt C_n , że odcinek $A_n C_n$ będzie mniejszy od ϵ .

Zachodzi pytanie, czy na prostej istnieje punkt B , oddzielający punkty A od punktów C ? (innymi słowy: czy istnieje odcinek OB , większy od wszystkich odcinków OA , lecz mniejszy od wszystkich odcinków OC ?)*)

*) Kto miałby trudność w zrozumieniu zagadnienia, może uciec się do następującego obrazu. Niech będą dane na prostej dwa rodzaje punktów: czerwone (A) i niebieskie (C); punkty czerwone niech się posuwają coraz dalej w prawo, niebieskie zaś w lewo, z tym jednak zastrzeżeniem, że nigdy żaden punkt czerwony nie mo-

Odpowiedź na to pytanie brzmieć musi twierdząco — o tym nikt chyba nie wątpi, kto dokładnie zrozumiał zagadnienie, niemniej jednak dowieść tej prawdy nie umiemy. Zmuszeni więc jesteśmy do założenia nowego pewnika.

Pewnik VI-e. Niech będą dane na prostej dwa nieskończone zbiory punktów A i C, które spełniają dwa następujące warunki:

(1) Punkty A leżą coraz dalej prawo, punkty C coraz dalej w lewo, przyczym jednak wszystkie punkty A znajdują się w lewo od punktów C;

(2) jakkolwiek mały byłby odcinek ϵ , możemy zawsze znaleźć taki punkt A_n i taki punkt C_n , że odcinek $A_n C_n$ jest mniejszy od ϵ .

Jeżeli oba te warunki są spełnione, wówczas istnieje jeden i tylko jeden punkt B, który oddziela wszystkie punkty A od punktów C.

Na mocy tego pewnika możemy twierdzić, iż liczbie niewymiernej $\sqrt{7}$ (i każdej wogóle liczbie niewymiernej) odpowiada, przy danej jednostce długości, jeden i tylko jeden odcinek.*)

§ 256. Analogicznie do mierzenia odcinków możemy rozwiązać zagadnienie mierzenia kątów.

Jako jednostkę obieramy kąt prosty, który dzielimy na 90 części równych, zwanych *stopniami*; stopień dzieli się na 60 *minut*, minuta na 60 *sekund*. Chcąc zaznaczyć, iż kąt $\sphericalangle \alpha$ ma 10 stopni, 6 minut, 17 sekund, piszemy:

$$\sphericalangle \alpha = 10^\circ 6'17''.$$

Gdyby $\sphericalangle \alpha$ był niespółmierny z obraną jednostką, wówczas pojęcie miary tego kąta ustalilibyśmy za pomocą takiego samego rozumowania, jak przy odcinkach.

że zamieszać się między niebieskie, ani też odwrotnie. [Własność (1)]. Prócz tego zakładamy, że odległość między punktami czerwonymi i niebieskimi maleje nieograniczenie [własność (2)]. Powstaje pytanie, czy istnieje na prostej taki punkt, który, nie należąc sam ani do grupy punktów czerwonych, ani do grupy niebieskich, oddziela od siebie obie grupy punktów?

*) Innymi słowy: ustaliliśmy twierdzenie proste: „każdemu odcinkowi odpowiada przekrój w dziedzinie liczb wymiernych”; aby ustalić twierdzenie odwrotne: „każdemu przekrojowi odpowiada odcinek”, musieliśmy wprowadzić nowy pewnik.

Niech będzie dany np. kąt $\sphericalangle \alpha$, mający więcej niż 300'', lecz mniej, niż 301'' i niespółmierny z kątem, który nazwalibyśmy sekundą.

Możemy podzielić sekundę na 10, 100, 1000, ... części równych i przekonać się, ile razy odłożyć trzeba kąt, równający się $\left(\frac{1}{10}\right)''$, $\left(\frac{1}{100}\right)''$, $\left(\frac{1}{1000}\right)''$, ... , aby otrzymać kąt cokolwiek mniejszy lub cokolwiek większy od kąta $\sphericalangle \alpha$.

Przypuśćmy, iż otrzymaliśmy następujące ciągi kątów:

$$\begin{aligned} 300'' &< \sphericalangle \alpha < 301'' \\ 300,4'' &< \sphericalangle \alpha < 300,5'' \\ 300,46'' &< \sphericalangle \alpha < 300,47'' \\ &\vdots \end{aligned}$$

Rzecz prosta, iż powyższe postępowanie możemy ciągnąć do nieskończoności.

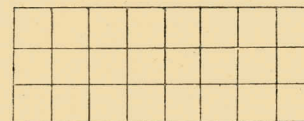
Ciąg rosnący liczb 300; 300,4; 300,46; ... i ciąg malejący 301; 300,5; 300,47; ... wyznaczają **przekrój** w dziedzinie liczb wymiernych czyli **wyznaczają pewną liczbę niewymierną, którą uważamy za miarę kątu $\sphericalangle \alpha$.**

W praktyce poprzestajemy na przybliżonym wyznaczeniu miary kąta; zatrzymujemy się mianowicie na którejkolwiek liczbie powyższych ciągów i uważamy ją za przybliżoną miarę kąta $\sphericalangle \alpha$.

§ 257. Jak z każdym odcinkiem związana jest pewna liczba, wyrażająca jego długość, tak samo z każdym wielokątem związana jest liczba, zwana jego *polem*. Wystarczy ustalić tę prawdę dla prostokątów.

Pole prostokąta znamy z kursu klas młodszych: wiemy, że gdy boki prostokąta są spółmierne z jednostką długości, wówczas pole prostokąta równa się iloczynowi długości podstawy przez długość wysokości. Liczba ta wyraża, ile w prostokącie mieści się kwadratów jednostkowych, t. j. kwadratów, których każdy bok ma jednostkę długości.

Za **jednostkę pola** uważamy właśnie pole takiego kwadratu.



Rys. 218.

Powstaje teraz pytanie: czy pojęcie pola da się rozszerzyć na prostokąty o bokach niespółmiernych z jednostką długości?

Przedewszystkim przypomnijmy sobie z kursu algebry, co nazywamy iloczynem dwóch liczb niewymiernych, np. iloczynem liczb $\sqrt{2} \times \sqrt{7}$.

Pierwsza z nich, t. j. $\sqrt{2}$ jest wyznaczona przez dwie klasy liczb wymiernych:

do klasy niższej należą wszystkie liczby, których kwadraty są mniejsze od 2 (nazwijmy je liczbami a),

do klasy wyższej należą wszystkie liczby, których kwadraty są od 2 większe (nazwijmy je liczbami a').

Tak samo liczba $\sqrt{7}$ wyznaczona jest przez dwie następujące klasy liczb:

do niższej klasy zaliczamy wszystkie liczby, których kwadraty są mniejsze od 7 (nazwijmy je liczbami b);

do klasy wyższej należą liczby, których kwadraty są od 7 większe (nazwijmy je liczbami b').

Otóż iloczyn $\sqrt{2} \times \sqrt{7}$ określamy w algebrze jako taki przekrój, że do jego klasy niższej należą wszystkie możliwe iloczyny $a \times b$, do klasy zaś wyższej należą wszystkie iloczyny $a' \times b'$.

Ponieważ do klasy liczb a należą, między innymi, liczby

1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...

liczby zaś

2; 2,6; 2,645; 2,6457; ...

należą do klasy b , zatem do niższej klasy przekroju, wyznaczającego iloczyn $\sqrt{2} \times \sqrt{7}$, należą, między innymi, wszystkie iloczyny w rodzaju następujących:

$2 \times 1,4$; $2 \times 1,41$; $2 \times 1,414$; $2 \times 1,4142$; ...

$2,6 \times 1,4$; $2,6 \times 1,41$; $2,6 \times 1,414$; $2,6 \times 1,4142$; ...

i t. d.

Uczeń sam wskaże kilka liczb, należących do klasy wyższej tego samego przekroju $\sqrt{2} \times \sqrt{7}$.

§ 258. Teraz będziemy mogli z łatwością ustalić pojęcie pola w zastosowaniu do prostokąta o bokach niespółmiernych z jednostką.

Niech będzie dany prostokąt $ABCD$, w którym długości boków wyrażają się liczbami niewymiernymi α , β . Prócz tego umówmy się, że symbolem a oznaczać będziemy każdą

liczbę wymierną, należącą do niższej klasy przekroju α , symbolem zaś a' oznaczać będziemy liczby wyższej klasy tegoż przekroju, tak iż

$$a < \alpha < a'.$$

Tak samo niech będzie

$$b < \beta < b'.$$

Zbudujmy prostokąt $AB_1C_1D_1$, mniejszy od danego i mający boki wymierne, oraz prostokąt $AB'C'D'$, większy od danego i mający również boki wymierne.

Długość boków AB_1 , AD_1 powinniśmy oznaczyć symbolami a , b , natomiast długości boków AB' , AD' musimy oznaczyć przez a' , b' (dlaczego?)

Pola prostokątów $AB_1C_1D_1$ i $AB'C'D'$ wyrażają się odpowiednio iloczynami

$$a \times b \quad \text{oraz} \quad a' \times b'.$$

Jeżeli teraz wyobrazimy sobie, że zostały pobudowane wszystkie możliwe prostokąty o bokach wymiernych, mniejsze od $ABCD$ oraz wszystkie prostokąty o bokach wymiernych większe od $ABCD$, wówczas pola tych prostokątów utworzą dwa nieskończone zbiory (dwie klasy) liczb wymiernych:

klasę niższą $a \times b$

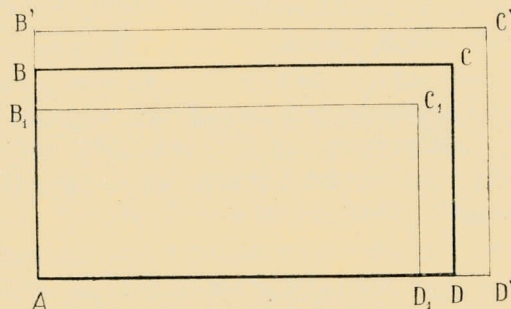
i klasę wyższą $a' \times b'$,

które wyznaczają (zgodnie z określeniem iloczynu) liczbę niewymierną $\alpha \times \beta$.

Tę liczbę niewymierną nazwiemy polem prostokąta $ABCD$.

W ten sposób zostanie zachowana znana nam z kursu klas młodszych:

Reguła. Aby obliczyć pole prostokąta, mnożymy przez siebie liczby, wyrażające długość podstawy i długość wysokości tego prostokąta.



Rys. 219.

Z reguły tej wynika, że pole prostokąta jest liczbą w zupełności wyznaczoną: każdy prostokąt posiada pole i każdy ma tylko jedno pole.

§ 259. Jeżeli teraz założymy, że wielokąty równoważne mają to samo pole, otrzymamy reguły na obliczanie pól rozmaitych wielokątów.

Wiemy np. (§ 177, str. 155), że równoległobok jest równoważny prostokątowi, mającemu tę samą podstawę i wysokość. Stąd wynika

Reguła. Aby obliczyć pole równoległoboku, mnożymy długość jego podstawy przez długość wysokości.

§ 260. W taki sam sposób z § 176 (str. 156) wynika

Reguła. Pole trójkąta otrzymujemy, mnożąc długość jego podstawy przez połowę długości wysokości.

§ 261. Z § 177 (str. 156) wynika

Reguła. Pole trapezu znajdujemy, mnożąc długość jego wysokości przez połowę sumy jego podstaw.

Ćwiczenia XL. Małymi literami oznaczaliśmy dotąd odcinki; teraz, w zadaniach rachunkowych będziemy często posługiwać się małymi literami w celu oznaczenia długości odcinków. Gdy mowa np. o trójkącie $\triangle ABC$, litery a, b, c mogą oznaczać nie tylko boki trójkąta (jak w zadaniach konstrukcyjnych), lecz również pewne liczby, będące miarami tych boków.

Każde z poniższych zadań należy rozwiązać najpierw w postaci ogólnej; potem dopiero można, w razie potrzeby, wstawić odpowiednie wartości.

1. Oznaczając przez a podstawę trójkąta, przez h jego wysokość, poprowadzoną do podstawy, napisać wzór na pole trójkąta.

1a. Napisać wzór na pole trapezu.

1b. Każdy bok trójkąta możemy uważać jako podstawę; wobec tego możemy dla każdego trójkąta utworzyć trzy iloczyny, z których każdy jest jego polem; powstaje pytanie, czy te trzy liczby są różne, czy też trójkąt ma tylko jedno pole?

2. Podstawa trójkąta jest stała, zmieniamy natomiast jego wysokość; jak zmienia się pole?

3. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy dane: $a = 6$ cm., $b = 14$ cm., $h_a = 4$ cm.; obliczyć h_b .

4. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy dane, że $h_a = 8$ cm. i że zachodzi proporcja $a : b = 3 : 4$; obliczyć h_b .

5. W trójkącie $\triangle ABC$ bok a i wysokość h_a są stałe, natomiast bok b zmienia się; w jaki sposób zmienia się wysokość h_b ?

6. W trójkącie $\triangle ABC$ boki a i b zmieniają się tak, że stosunek ich pozostaje stały i równa się liczbie m ; czy stosunek wysokości $h_a : h_b$ zmienia się i w jaki sposób?

7. Boki prostokąta danego oznaczamy przez a i b ; obliczyć podstawę x równoważnego mu trójkąta, jeżeli wysokość trójkąta oznaczyliśmy przez h .

Zastosowania:

(1) $a = 11,2$ cm., $b = 8,4$ cm., $h = 4,6$ cm., x z dokładn. do 0,1 cm.

(2) $a = 14$ cm., $b = 5,4$ cm., $h = 3x$.

(3) $a = 10$ cm., $b = 16,8$ cm., $h = 3x$; obliczyć x z dokład. do 0,1 cm.

8. Pole rombu $= S$, jedna jego przekątna $= e$, obliczyć długość f drugiej przekątnej.

Zastosowanie:

$S = 40,38$ cm.², $e = 16,2$ cm., f z dokładnością do 1 cm.

9. Wyrazić pole trójkąta jako funkcję jego obwołu $2p$ i promienia koła wpisanego ρ .

Zastosowanie: $2p = 72,16$ cm., $\rho = 4,8$ cm.; obliczyć pole z dokładnością do 1 cm.²

10. Bok rombu $= a$, pole jego $= s$. Obliczyć promień ρ koła wpisanego.

Zastosowanie: $a = 24,08$ cm., $s = 164$ cm.²; obliczyć ρ z dokładnością do 0,1 cm.

11. Pole trapezu $= s$, wysokość $= h$, różnica obu podstaw $= k$ obliczyć długości obu podstaw.

Zastosowanie: $s = 45$ cm.², $h = 4,5$ cm., $k = 3,6$ cm.

12. W prostokącie $ABCD$ prowadzimy z wierzchołka A do boku BC odcinek AK , który dzieli pole prostokąta w stosunku $m : n$. Obliczyć długość odcinka BK .

13. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy daną podstawę c , wysokość h oraz warunek, iż $a : b = k : m$, gdzie k i m są to dwie liczby dane. Obliczyć pola obu trójkątów, na które trójkąt dany został podzielony przez dwusieczną kąta $\sphericalangle C$.

14. Trójkąt $\triangle ABC$ przecięto prostą KL , równoległą do AB ; znaleźć wzory na pola obu figur, na które został podzielony trójkąt $\triangle ABC$, jeżeli wiadomo, iż wysokość jego h została podzielona w stosunku $1 : 4$.

15. Trapez, którego podstawy równają się odpowiednio a cm. i b cm., wysokość zaś ma h cm., przecięto prostą, równoległą do podstaw tak, iż wysokość została podzielona w stosunku $1 : 2$. Obliczyć pola obu części, na które podzieliliśmy trapez.

§ 262. Z pojęć długości odcinka i pola wielokąta wynikają inne sformułowania wielu prawd geometrycznych, poznanych w rozdziałach poprzednich.

Np. w § 203 (str. 190) podaliśmy następujące określenie odcinków proporcjonalnych:

2. Mamy dane dwa odcinki $a = 10$ cm., $b = 20$ cm., z których chcemy zbudować trójkąt rozwartokątny, i w tym celu dobieramy odpowiedniej długości trzeci odcinek c . Jak wielki powinien być ten odcinek c , jeżeli chcemy, żeby kąt $\sphericalangle C$ był rozwarty?

2a. To samo pytanie w założeniu, iż kąt $\sphericalangle B$ ma być rozwarty.

3. W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$, w którym kąt $\sphericalangle C$ jest prosty, mamy dane: $r_a = 2$ cm., $r_b = 30$ cm. Obliczyć boki i wysokość trójkąta.

4. Dowieść, iż w trójkącie prostokątnym, w którym c jest przeciwprostokątną, mamy zawsze

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}.$$

5. W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$ (gdzie $\sphericalangle C = \delta$) mamy dane $r_a : r_b = 1,25$ oraz $h = 16$; obliczyć boki trójkąta.

6. W poprzednim zadaniu niech będą dane

$$r_a : r_b = 3 : 4; \quad a^2 - b^2 = 12.$$

7. Przekątne rombu równają się odpowiednio 8 cm. i 9 cm.; obliczyć jego bok z dokładnością do 1 mm.

8. Znaleźć wzór na wysokość i na pole trójkąta foremnego, którego bok $= a$.

9. Mamy dane trzy odcinki o długości 1 m., 2 m. i 3 m.; czy możemy powiększyć je wszystkie o ten sam odcinek x tak, żeby z odcinków powiększonych można było zbudować trójkąt prostokątny?

10. Dane jest koło $(O)r$ i punkt zewnętrzny A . Prosta OA przecina koło w punktach B i B' ; obliczyć długość stycznej, poprowadzonej z punktu A , jeżeli mamy dane, że $AB = k$.

Zastosowanie: $r = 6$ cm., $k = 14$ cm.; obliczyć długość stycznej z dokładnością do 0,1 cm.

11. Dane są dwa koła $(O)r$ i $(O')r'$; obliczyć długości ich wspólnych stycznych wewnętrznych i zewnętrznych.

Zastosowanie: $OO' = 8$ cm., $r = 2$ cm., $r' = 4$ cm.

12. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy dane: $a = 13$ cm., $\sphericalangle A = 120^\circ$, $b + c = 15$ cm. Obliczyć boki b i c .

13. W koło $(O)r$ wpisać prostokąt, mając daną różnicę dwóch jego boków $= k$.

To samo zadanie rozwiązać za pomocą rachunku, t. j. obliczyć boki a , b , mając dane, że $a - b = k$.

14. Obliczyć promień koła, opisanego na trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$, mając dane, że $a = b = 10$ cm.; $h_c = 6$ cm.

[Wskazówka: Wysokość CD przedłużamy aż do przecięcia się w punkcie E z kołem opisanym, poczym badamy trójkąt $\triangle EAC$].

15. W poprzednim zadaniu obliczyć

1) promień koła wpisanego;

2) odległość środka O koła opisanego od boku c ;

3) odległość OW , gdzie W jest środkiem koła wpisanego.

16. Promienie dwóch przecinających się kół równają się 30 cm. i 26 cm., wspólna ich cięciwa $= 48$ cm.; obliczyć odległość ich środków.

17. Do koła o promieniu r poprowadzono styczne $AB = AC = a$; obliczyć odległość między punktami styczności.

18. W trapezie równoramiennym $ABCD$ mamy dane wszystkie boki; obliczyć jego wysokość i pole.

Zastosowanie: $a = 8$ cm., $b = 4$ cm., $d = 10$ cm.; obliczyć h z dokładnością do 1 mm. Z jaką dokładnością możemy obliczyć pole, posługując się znalezioną wartością na h ?

19. W kole dana jest średnica AB i równoległa do niej cięciwa CD . Uważając jako znane odcinki $AC = k$, $AD = m$, obliczyć

1) podstawy trapezu $ABCD$;

2) jego pole.

20. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy dane: $a = 21$ cm., $b : c = 3 : 8$; $\sphericalangle A = \frac{3}{4}\delta$; obliczyć b i c .

21. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy dane: $\sphericalangle A = \frac{3}{4}\delta$; $b = 12$ cm., $a = 28$ cm.; obliczyć bok c .

22. Obliczyć z dokładnością do 1 cm. pole rombu, którego większa przekątna $f = 108$ cm., mniejsza zaś e równa się bokowi a rombu.

23. Niech będzie dany trapez równoramienny $ABCD$, w którym $a = c$. Oznaczmy połowę sumy podstaw przez m , połowę ich różnicy przez k , pole trapezu przez S , wysokość przez h , przekątną przez f . Dowieść następujących wzorów:

$$1) \quad h = \sqrt{a^2 - k^2}; \quad f = \sqrt{a^2 + bd} = \sqrt{h^2 + m^2}$$

$$2) \quad h = \frac{\sqrt{(a+b+f)(a+b-f)(b+f-a)(a+f-b)}}{2a}$$

24. W trapezie równoramiennym mamy dane: większą podstawę d , boki $a = c$ oraz warunek, że $\sphericalangle A = \sphericalangle D = \frac{3}{4}\delta$. Obliczyć pole trapezu oraz pole trójkąta, który powstaje wskutek przedłużenia boków AB , CD .

Zastosowanie: $a = 14$ cm., $d = 36$ cm.

25. Opierając się na uogólnionym tw. Pitagorasa, dowieść, że w każdym równoległoboku suma kwadratów przekątnych równa się sumie kwadratów czterech jego boków.

26. Na mocy poprzedniego zadania otrzymać wzór na środkową trójkąta, jeżeli mamy dane trzy jego boki.

27. Sprawdzić następujący wzór na długość dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie:

$$d_A^2 = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}$$

28. Znaleźć analogiczny wzór dla dwusiecznej kąta zewnętrznego.

29. Jeżeli w czworoboku opisanym na kole przekątne są do siebie prostopadłe, wówczas iloczyn przeciwległych boków równa się sobie.

30. Jeżeli dwie cięciwy, przecinające się wewnątrz koła, są do siebie prostopadłe, wówczas suma kwadratów czterech ich odcinków równa się kwadratowi średnicy.

31. W trapezie suma kwadratów przekątnych równa się sumie kwadratów boków więcej podwojony iloczyn obu podstaw.

32. Pole trójkąta prostokątnego równa się iloczynowi dwóch odcinków, na które punkt styczności koła wpisanego dzieli przeciwprostokątną.

33. Punkt styczności koła wpisanego dzieli przeciwprostokątną w stosunku $m:n$; obliczyć długość promienia koła wpisanego i pole trójkąta.

34. W trójkącie ostrokątnym $\triangle ABC$ zachodzą następujące związki:

$$h_b = h_a, \quad BH = \frac{1}{4}h_b, \quad AH = \frac{1}{4}h_a,$$

gdzie H oznacza ortocentrum trójkąta. Obliczyć: 1) boki trójkąta; 2) wysokość jego; 3) pole. [Wskazówka: uwzględnić podobieństwo trójkątów].

35. W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$, w którym $h_c > \frac{c}{2}$ oraz $a = b$, wyrazić następujące wielkości jako funkcje zmiennych h_c i c :

- 1) długości odcinków, na które ortocentrum dzieli wysokość h_c ;
- 2) pole trójkąta $\triangle ABB'$, gdzie B' jest spodkiem wysokości, poprowadzonej z wierzchołka B .

36. Jeżeli mamy dane dwa punkty nieruchome A, A' oraz punkt C , który porusza się po płaszczyźnie w taki sposób, iż różnica kwadratów jego odległości od punktów A i A' jest stała, wówczas C kreśli prostą, prostopadłą do prostej AA' . [Wskazówka: wykreślić prostopadłą CC' i zastosować dwukrotnie tw. Pitagorasa].

37. **Twierdzenie Ptolomeusza.*)** W czworoboku wpisanym w koło iloczyn przekątnych równa się sumie iloczynów boków przeciwległych.

*) Klaudjusz Ptolomeusz, największy astronom czasów starożytnych nauczał w Aleksandrii w II w. po Chr. Ptolomeusz był autorem słynnej hipotezy, objaśniającej ruchy układu planetarnego w założeniu, że słońce i planety krążą dookoła ziemi. Dopiero Kopernikowi udało się obalić tę hipotezę.

Twierdzenie przeciwne. Jeżeli czworobok nie daje się wpisać w koło, wówczas iloczyn przekątnych nie równa się sumie iloczynów boków przeciwległych, a mianowicie jest mniejszy od tej sumy.

Zaczniemy od twierdzenia przeciwnego. Jeżeli na czworoboku $ABCD$ nie można opisać koła, wówczas powiadam, że

$$AC \cdot BD < AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Ponieważ $\sphericalangle 3$ nie równa się kątowi $\sphericalangle 2$, możemy więc przypuścić, że $\sphericalangle 2$ jest od $\sphericalangle 3$ większy. Uczyńmy $\sphericalangle BCE = \sphericalangle 2$ oraz $\sphericalangle EBC = \sphericalangle 1$.

Ponieważ $\triangle BCE \sim \triangle ABD$, zatem

$$AD \cdot BC = BD \cdot CE \quad \dots \quad (1)$$

$$AB \cdot BC = BD \cdot BE \quad \dots \quad (2)$$

Z równości (2) i z tego, że $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CBD$ wynika, iż $\triangle ABE \sim \triangle BCD$, zatem

$$AB \cdot CD = BD \cdot AE \quad \dots \quad (3).$$

Z równości (1) i (3) mamy

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD(AE + CE), \quad \dots \quad (4),$$

a ponieważ

$$AE + CE > AC,$$

zatem twierdzenie jest dowiedzione.

Z wzoru (4) uczeń sam otrzyma dowód twierdzenia Ptolomeusza.

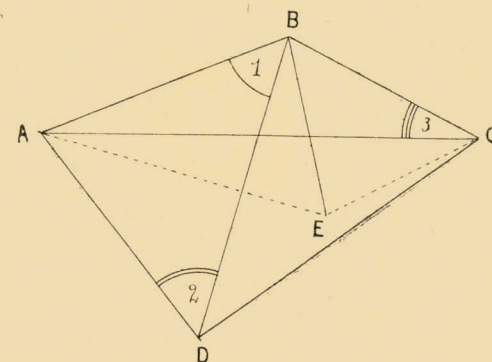
Twierdzenie Ptolomeusza wraz z twierdzeniem przeciwnym dają nam nowy sposób poznania, czy [cztery punkty leżą czy nie leżą na jednym okręgu.

Jakie inne twierdzenia służą do tego samego celu?

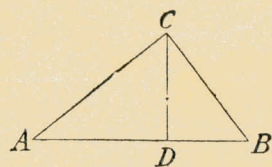
§ 265. Wzór Herona. Zwykła reguła na obliczanie pola trójkąta nie jest dogodna przy pomiarach w naturze, gdyż prowadzenie wysokości w trójkącie byłoby czynnością kłopotliwą i trudną do dokładnego wykonania. Natomiast, mając dany jakiś kawał ziemi lub inny przedmiot w kształcie trójkąta, możemy z dowolną dokładnością zmierzyć jego boki.

To spostrzeżenie nasuwa nam następujące zagadnienie:

obliczyć pole trójkąta, mając dane trzy jego boki.



Rys. 222.



Rys. 223.

Oznaczając pole trójkąta $\triangle ABC$ przez S , wysokość CD przez h , mamy wzór

$$S = \frac{ch}{2},$$

z którego należy wyrugować wysokość h . Z trójkąta $\triangle ACD$ otrzymujemy

$$h^2 = b^2 - AD^2,$$

Z $\triangle ABC$ zaś mamy

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2AD \cdot c,$$

$$\begin{aligned} \text{zatem } h^2 &= b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right)^2 \\ &= \frac{4c^2b^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} = \frac{(2cb + b^2 + c^2 - a^2)(2cb - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2} \\ &= \frac{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}{4c^2} \\ &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2}. \end{aligned}$$

Jeżeli teraz oznaczymy obwód trójkąta $\triangle ABC$ przez $2p$, wówczas będziemy mieli

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2p \\ a + b - c &= 2(p - c) \\ a - b + c &= 2(p - b) \\ b + c - a &= 2(p - a). \end{aligned}$$

Wobec tego

$$h^2 = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4c^2}.$$

$$\text{Tak więc } S = \frac{ch}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

§ 266. Badając pola wielokątów podobnych, natrafiamy na następujące twierdzenie, mające liczne zastosowania, zwłaszcza przy obliczaniu powierzchni i objętości brył.

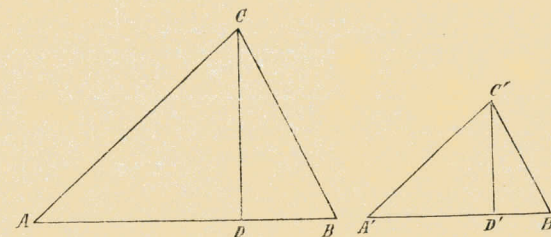
Twierdzenie. Pola podobnych wielokątów mają się do siebie tak, jak kwadraty boków odpowiednich.

I. Twierdzenia dowiedzimy najpierw dla trójkątów. Jeżeli mamy dane dwa trójkąty podobne

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

i jeżeli wykreślimy w nich wysokości CD , $C'D'$, wówczas musi być również

$$\triangle ACD \sim \triangle A'C'D' \quad (\text{dlaczego?})$$



Rys. 224.

Oznaczając pola trójkątów danych odpowiednio przez S i S' , wysokości zaś CD i $C'D'$ przez h i h' , mamy (§ 260, str. 256).

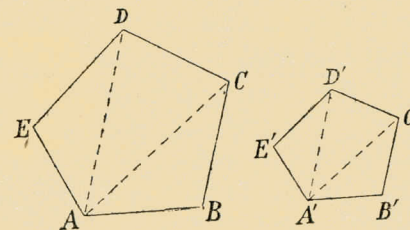
$$\frac{S}{S'} = \frac{ch}{c'h'}.$$

Z trójkątów $\triangle ACD$, $\triangle A'C'D'$ mamy

$$\frac{h}{h'} = \frac{b}{b'}, \text{ a więc również } \frac{h}{h'} = \frac{c}{c'} \quad (\text{dlaczego?})$$

$$\text{czyli } \frac{S}{S'} = \frac{c^2}{c'^2}.$$

II. Niech będą dane np. dwa podobne pięciokąty.



Rys. 225.

Oznaczmy boki ich odpowiednio przez $a_1, a_2, \dots, a_5$ oraz $a'_1, a'_2, \dots, a'_5$.

$$\text{Mamy } \frac{a_1}{a'_1} = \frac{a_2}{a'_2} = \dots = \frac{a_5}{a'_5}.$$

Jeżeli podzielimy nasze wielokąty w jednakowy sposób na trójkąty (np. za pomocą przekątnych, jak na rysunku 225), wówczas otrzymamy szereg podobnych trójkątów. Oznaczając ich pola przez $S_1, S_2, \dots$, mamy

$$\frac{S_1}{S'_1} = \frac{S_2}{S'_2} = \frac{S_3}{S'_3} = \frac{a_1^2}{a_1'^2},$$

zatem

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S'_1 + S'_2 + S'_3} = \frac{a_1^2}{a_1'^2}.$$

Ćwiczenia XLII. 1. Wykazać, że pola podobnych trójkątów mają się do siebie tak, jak kwadraty ich wysokości, środkowych, dwusiecznych, promieni kół wpisanych lub opisanych.

2. W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$, w którym $\angle C = \delta$, obliczyć wysokość CC' jako funkcję przeciwprostokątnej, jeżeli wiemy, że $S_{\triangle ACC'} : S_{\triangle BCC'} = m^2 : n^2$ i że $r_a : c = k : l$, gdzie k, l, m, n , są to liczby dane.

3. Pole trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$ równa się k^2 ; obliczyć pole trójkąta $\triangle ACC'$, jeżeli wiadomo, że $a : r_a = m$ i że CC' jest wysokością.

4. W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$, bok $c = 40$ cm., a $S_{\triangle CCA'} : S_{\triangle AA'B} = 3 : 4$; obliczyć długość odcinka BA' , jeżeli A', C' są spodkami wysokości.

5. W trójkąt równoramienny $\triangle ABC$ wpisano koło, dotykające równych boków a i b odpowiednio w punktach A_1, B_1 . Obliczyć promień koła wpisanego, jeżeli wiemy, że $c = 60$ cm. i że pole czworoboku A_1CB_1W jest 3 razy mniejsze od pola trójkąta $\triangle ABC$.

6. Trójkąt $\triangle ABC$ przeciąć prostą równoległą od boku a tak, by podzielić jego pole w stosunku 9 : 16.

Twierdzenie § 266 opiera się jedynie na pojęciach pola i podobieństwa, natomiast nigdzie w dowodzie nie opieraliśmy się na tw. Pitagorasa. Jest więc ono niezależne od tw. Pitagorasa i może stanowić podstawę dowodu tego twierdzenia.

7. Dowieść twierdzenia Pitagorasa, opierając się na tym, że wysokość dzieli trójkąt prostokątny na trójkąty podobne.

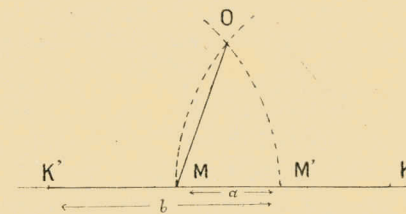
Twierdzenie Pitagorasa i tw. §§ 263, 264 dadzą się z łatwością uogólnić w następujący sposób:

8. W dowolnym trójkącie $\triangle ABC$ prowadzimy odcinek BB' tak, żeby było: $\angle AB'B = \angle ABC$. Z podobieństwa trójkątów otrzymać związek $c^2 = b \cdot AB'$ i wykazać, że mamy tu uogólnienie twierdzenia § 264, wzór (2).

9. W dowolnym trójkącie $\triangle ABC$ prowadzimy proste BB' , BB'' tak, żeby było: $\angle AB'B = \angle BB''C = \angle ABC$. Wykazać, że wówczas mamy: $BB'^2 = BB''^2 = AB' \cdot B''C$ i że otrzymaliśmy w ten sposób uogólnienie twierdzenia § 264, wzór (1).

10. Z zadania 8-go wysnuć uogólnienie tw. Pitagorasa.

11. Uzasadnić następującą konstrukcję odcinka średniego proporcjonalnego. Niech będą dane odcinki a i b . Na dowolnej prostej odkładamy odcinek $MM' = a$ oraz odcinki $MK = M'K' = b$, poczym kreślimy koła $(K)b$ i $(K')b$, przecinające się w punkcie O . Mamy $MO^2 = ab$.



Rys. 226.

12. Na zadaniu 9-ym można oprzeć nową konstrukcję odcinka średniego proporcjonalnego.

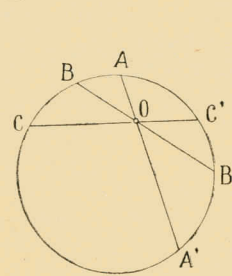
ROZDZIAŁ II.

O potędze punktu względem koła, o osiach pierwiastnych i o pękach kół.

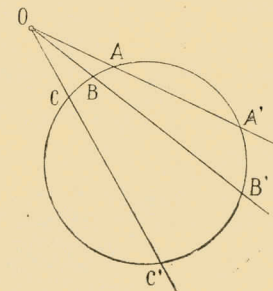
§ 267. W §§ 195—198 (str. 179) poznaliśmy szereg twierdzeń o liniach stycznych i siecznych do koła. Wszystkie te twierdzenia dadzą się wysłowić inaczej i ująć w jedno następujące

Twierdzenie. Jeżeli koło przecina proste należące do jednego pęku, wówczas wyznacza na każdej z nich po dwa odcinki, mierzone od wierzchołka pęku; iloczyn tych odcinków jest wielkością stałą dla danego wierzchołka i danego koła.

W szczególności iloczyn ten równa się kwadratowi stycznej, poprowadzonej z wierzchołka pęku, jeżeli wierzchołek ten leży zewnątrz koła.



Rys. 227.



Rys. 228.

Stały iloczyn, o którym mowa w twierdzeniu, nazywa się *potęgą punktu* (mianowicie wierzchołka pęku) *względem koła*.

Zwróćmy uwagę, iż jeśli wierzchołek O leży wewnątrz koła, wówczas odcinki, wyznaczone na każdej siecznej, mają zwroty przeciwne (jak np. OA , OA' na rys. 227), a więc długości ich wyrażają się liczbami o znakach przeciwnych (jeśli więc długość OA uważamy za liczbę dodatnią, to długość OA' musi być liczbą ujemną, i odwrotnie).

Jeżeli natomiast wierzchołek O leży zewnątrz koła, wówczas odcinki OA , OA' i t. d. mają wszystkie ten sam zwrot, a więc długości ich są liczbami o tym samym znaku.

Wynika stąd, że potęga punktu, leżącego wewnątrz koła, jest liczbą ujemną, potęga zaś punktu zewnętrznego jest liczbą dodatnią.

Jaką liczbą wyraża się potęga punktu, leżącego na okręgu koła?

§ 268. Twierdzenie. *Jeżeli mamy dane dwa koła $(O)r$, $(O')r'$, wówczas miejscem geometrycznym punktów, mających tę*

samą potęgę względem obu kół, jest prostopadła do ich linii środków.

Prostopadła ta zwie się *osią pierwiastną* kół danych.

I. Rozważmy najpierw przypadek, gdy koła przecinają się. Każdy punkt C , leżący na przedłużeniu wspólnej cięciwy AA' , ma jednakową potęgę względem obu kół, mianowicie

$CA \cdot CA' = CD \cdot CD'$.

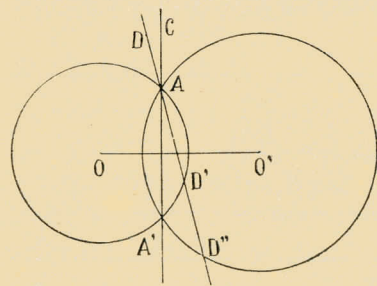
Powtóre, żaden inny punkt D płaszczyzny nie posiada tej własności, gdyż w takim razie mielibyśmy (rys. 229).

$$DA \cdot DD' = DA \cdot DD''$$

czyli

$$DD' = DD'',$$

co jest niedorzeczne.



Rys. 229.

II. Jeżeli dane koła nie przecinają się, wówczas przecinamy je oba dowolnym trzecim kołem (rys. 230); wspólne cięciwy AB , $A'B'$ niech się przecinają w punkcie P . Punkt ten ma jednakową potęgę względem obu danych kół $(O)r$ i $(O')r'$ (dla czego?) Powiadam, że prosta PK , prostopadła do linii środków OO' , jest żądanym miejscem geometrycznym.

Istotnie, jeżeli wprowadzimy następujące oznaczenia (rys. 231):

$$PS = PS' = l, \quad PO = a, \\ PO' = b,$$

wówczas musi być

$$l^2 = a^2 - r^2 = b^2 - r'^2, \\ \text{zatem } a^2 - b^2 = r^2 - r'^2.$$

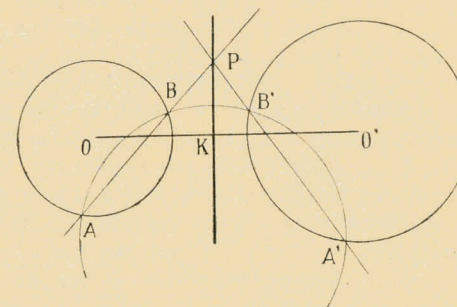
Ponieważ $r^2 - r'^2$ jest wielkością stałą (dla czego?), zatem punkt P posiada tę własność, że różnica kwadratów jego odległości od dwóch stałych punktów O , O' jest stałą. Wynika stąd, że miejscem geometrycznym punktu P jest prostopadła PK . (Ćwiczenia XLI, 36, str. 262).

Ćwiczenia XLIII. 1. Zbudować oś pierwiastną dwóch kół, nie budując prostopadłej do ich linii środków.

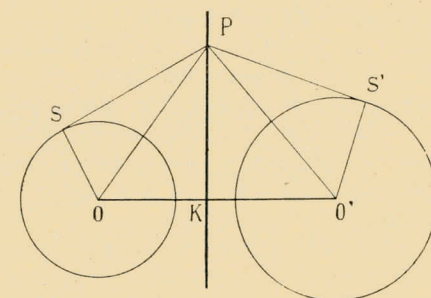
2. Zbadać, jak zmienia się położenie osi pierwiastnej dwóch kół $(O)r$, $(O')r'$, jeżeli koło $(O)r$ jest nieruchome, drugie zaś koło $(O')r'$ przesuwamy po płaszczyźnie. W szczególności zastanowić się nad położeniem osi pierwiastnej, jeżeli

- 1) koła są do siebie styczne wewnętrznie lub zewnętrznie,
- 2) jedno leży wewnątrz drugiego,
- 3) koła są współśrodkowe.

3. Niech będą dane na płaszczyźnie trzy koła $(O)r$, $(O')r'$, $(O'')r''$, których środki O , O' , O'' nie leżą na jednej prostej. Dowieść, że trzy osie pierwiastne tych kół przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 230.



Rys. 231.

Punkt ten nazywa się *środkiem pierwiastnym trzech kół*.

4. Odszukać środek pierwiastny trzech kół, których środki leżą na jednej prostej.

4a. Czy zawsze istnieje środek pierwiastny czterech kół?

5. Czy można odnaleźć środek pierwiastny trzech kół, stycznych do siebie w tym samym punkcie A ?

6. Jeżeli ze środka pierwiastnego poprowadzimy styczne do wszystkich trzech kół, wówczas ich punkty styczności znajdują się na okręgu czwartego koła, przecinającego trzy koła dane pod kątem prostym.*)

7. Ortocentr trójkąta jest środkiem pierwiastnym kół, wykreślonych na bokach trójkąta, jako na średnicach.

8. Ortocentr trójkąta jest środkiem pierwiastnym trzech kół, których średnicami są odcinki wysokości trójkąta, zawarte między ortocentrem a wierzchołkami.

9. Jeżeli mamy dane dwa koła, wówczas środki wszystkich ich wspólnych stycznych leżą na jednej prostej.

10. Znaleźć środek pierwiastny trzech kół zawpisanych trójkąta $\triangle ABC$. [Wskazać: środek boku jest zarazem środkiem wspólnej stycznej do dwóch kół].

11. Niech A' , B' , C' będą środkami boków a , b , c . Jaki związek zachodzi między środkiem pierwiastnym, o którym mowa w zadaniu poprzednim, a kołem wpisanym w trójkąt $\triangle A'B'C'$?

12. Jeżeli z dowolnego punktu osi pierwiastnej dwóch kół poprowadzimy do nich po jednej siecznej, wówczas cztery punkty przecięcia się siecznych z kołami danymi muszą leżeć na okręgu trzeciego koła.

13. Dana jest prosta m i punkt A nie leżący na niej. Łączymy A z dowolnym punktem P prostej m i na prostej AP wybieramy taki punkt Q , że $AP \cdot AQ$ jest wielkością stałą. Co kreśli punkt Q , gdy punkt P przesuwa się po prostej m ?

14. Dane są dwa koła $(O)r$ i $(O')r'$ oraz dwie liczby k^2 i m^2 . Znaleźć na płaszczyźnie taki punkt P , żeby jego potęga względem pierwszego koła równała się k^2 ; względem drugiego równała się m^2 .

15. Każdy punkt możemy uważać jako koło o promieniu równającym się zeru. Czym wobec tego jest potęga jednego punktu względem drugiego?

15a. Zbudować oś pierwiastną danego koła $(O)r$ i danego punktu M .

16. Danym promieniem r zakreślić koło, przecinające dwa dane koła pod kątem prostym.

17. Danym promieniem r zakreślić koło, przechodzące przez dany punkt A i przecinające pod kątem prostym inne, dane koło.

*) Kątem między dwiema liniami krzywymi nazywamy kąt między stycznymi, poprowadzonymi do tych krzywych w ich punkcie przecięcia się.

18. Wykreślić koło, przecinające pod kątem prostym trzy dane koła.

19. Dane są dwa koła. Wykreślić trzecie koło, przecinające dwa pierwsze pod kątem prostym tak, żeby styczna do tego trzeciego koła, poprowadzona z danego punktu A , równała się danemu odcinkowi m .

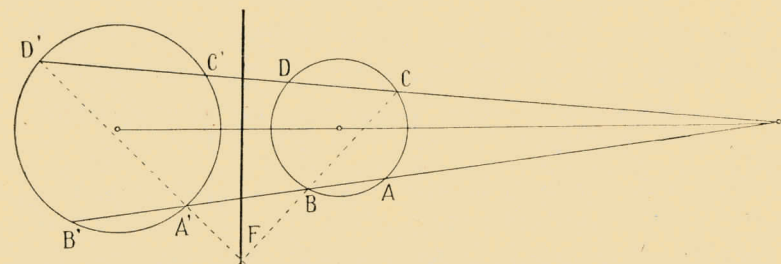
20. Miejscem geometrycznym środków kół, przecinających dwa dane koła $(O)r$, $(O')r'$ według średnic, jest prosta, symetryczna z osią pierwiastną tych dwu kół względem środka odcinka OO' .

21. Wykreślić koło, przecinające dwa dane koła według średnic, trzecie zaś dane koło pod kątem prostym.

22. Jeżeli ze środka jednokładności J (lub J') dwóch kół poprowadzimy sieczną, przecinającą koło w punktach P , Q , P' , Q' , tak iż P i P' odpowiadają sobie, wówczas musi być

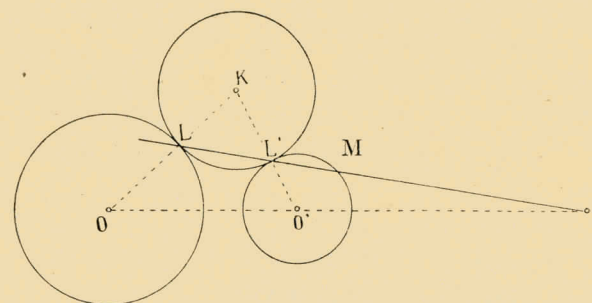
$$JP \cdot JQ' = JQ \cdot JP'.$$

23. Co dzieje się z iloczynami, o których mowa w zadaniu poprzednim, jeżeli sieczną obracamy dokoła środka jednokładności.



Rys. 232.

24. Ze środka jednokładności J prowadzimy dwie sieczne, przecinające jedno dane koło w punktach A , B , C , D , drugie zaś w punktach A' , B' , C' , D' . Dowieść, że wszystkie nieodpowiadające sobie cięciwy (np. $A'D'$ oraz BC) przecinają się na osi pierwiastnej



Rys. 233.

kół. [Wskazówka: B, C, A', D' leżą na jednym okręgu. Dlaczego?]

25. Jeżeli wykreślimy dowolne koło, styczne do dwu danych kół $(O)r, (O')r'$, wówczas prosta, łącząca punkty styczności, musi przejść przez środek jednokładności kół danych. [Wskazówka: dowiedzieć, iż $O'M//OL$].

26. Kiedy w poprzednim zadaniu prosta LL' przechodzi przez środek jednokładności zewnętrzny, kiedy zaś przez wewnętrzny?

27. Jeżeli wykreślimy dwa koła styczne do dwu danych kół, wówczas oś pierwiastna którejkolwiek pary kół przechodzi przez środek jednokładności drugiej pary. Jakie ograniczenie należy wprowadzić, dotyczące rodzaju styczności?

28. Dane są punkty A, B i koło $(O)r$. Znaleźć taki punkt X , żeby było $AX = XB$ oraz żeby odcinek AX równał się stycznej, poprowadzonej z punktu X do koła danego.

29. Wykreślić dwa koła, mając dane ich środki, oś pierwiastną i środek jednokładności zewnętrzny.

§ 269. Określenie. *Pękiem kół nazywamy wszystkie koła, mające wspólną linię środków i wspólną oś pierwiastną.*

Wprowadzając pojęcie pędu kół, musimy wykazać na przykładach, że taki układ kół naprawdę istnieć może.

Niech na prostej m będą dane dwa dowolne punkty A, A' . Istnieje nieskończenie wiele kół, przechodzących przez te dwa punkty. Środki tych kół leżą wszystkie na jednej prostej (jakiej?), prosta zaś m jest wspólną osią pierwiastną tych kół.

Wobec tego wszystkie nasze koła tworzą pęk. Jest to t. zw. *pęk pierwszego rodzaju* albo *pęk eliptyczny*.

Obierzmy na prostej m dowolny punkt B , nie należący do odcinka AA' . Z punktu B możemy poprowadzić styczne $BS_1, BS_2, \dots$ do wszystkich kół pędu; styczne te równają się sobie, zatem punkty $S_1, S_2, S_3, \dots$ leżą wszystkie na jednym okręgu, którego środkiem jest punkt B .

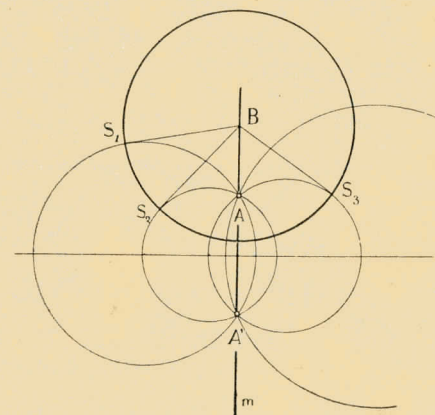
Powtarzając to samo rozumowanie dla każdego innego punktu prostej m , nie należącego do odcinka AA' , otrzymamy t. zw. *pęk kół drugiego rodzaju*, albo *pęk hiperboliczny*.

Istotnie wszystkie te koła mają wspólną linię środków (mianowicie prostą m) oraz wspólną oś pierwiastną (mianowicie linię środków pierwszego pędu).

Aby tego dowiedzieć, wystarczy zauważyć, że każde koło pierwszego pędu przecina pod kątem prostym koło drugiego pędu, jak widać z rysunku (dlaczego?)

Punkt przecięcia się linii środków wszystkich kół pędu z osią pierwiastną tych kół nazywa się *punktem środkowym pędu*.

§ 270. Cechą charakterystyczną pędu kół pierwszego rodzaju jest to, że wszystkie koła pędu przechodzą przez dwa stałe punkty, zwane *punktami podstawowymi pędu*. Wobec tego punkt środkowy pędu leży wewnątrz



Rys. 234.

każdego z kół pędu, potęgą więc jego względem kół pędu wyraża się zawsze liczbą ujemną (rys. 235).

W pęku kół drugiego rodzaju punkt środkowy leży zewnątrz kół pędu (rys. 236), ma więc potęgę dodatnią względem wszystkich kół pędu.

Jeżeli w pęku eliptycznym czyli w pęku pierwszego rodzaju (rys. 235) oznaczmy punkt środkowy przez O , punkty podstawowe przez A i A' , wreszcie odcinek OA przez k , wówczas potęga punktu O względem każdego koła pędu wyrazi się iloczynem długości odcinków OA i OA' czyli równać się będzie liczbie ujemnej — k^2 . Oznaczając przez d odległość od A do środka M któregośkolwiek koła pędu, przez r promień tego koła, mamy:

$$r^2 = d^2 + k^2 \dots (2)$$

Jak widać z tego równania, na d możemy dawać wszelkie możliwe wartości dodatnie i ujemne: długość promienia

r będzie zawsze liczbą rzeczywistą (dlaczego?) Znaczy to, że każdy punkt na linii środków MN może być środkiem koła, należącego do pęku.

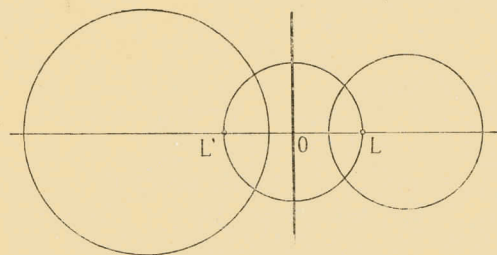
Jeżeli natomiast mamy do czynienia z pękiem drugiego rodzaju (rys. 236), wówczas, oznaczając przez k^2 potęgę punktu O względem kół pęku, mamy

$$r^2 = a^2 - k^2 \dots (2),$$

skąd wynika, że musi być

$$\text{albo } d < -k, \text{ albo } d > k \quad (\text{dlaczego?})$$

Dowodzi to, że jeśli po obu stronach punktu O odłożymy odcinki $OL = k$, $OL' = -k$, wówczas na odcinku LL' nie może znajdować się środek żadnego z kół pęku.



Rys. 236.

Punkty L, L' nazywamy punktami granicznymi pęku drugiego rodzaju, a to dlatego, że przy $d = \pm k$ mamy z równania (2)

$$r = 0$$

tak, że punkty L, L'

możemy uważać za koła o promieniu równającym się zeru i możemy powiedzieć, że te dwa koła należą również do pęku.

Ćwiczenia XLIV. 1. Jakie jest najmniejsze koło w danym pęku pierwszego rodzaju? Czy w pęku drugiego rodzaju istnieje koło najmniejsze?

2. Czy można zbudować taki pęk kół, by punkt środkowy pęku miał względem wszystkich jego kół potęgę równającą się zeru? (pęk paraboliczny).

3. Dwa pęki kół nazywamy *sprzężonymi*, jeżeli koła jednego pęku przecinają pod kątem prostym wszystkie koła drugiego pęku i odwrotnie.

Wykazać, że pęk hiperboliczny jest sprzężony z eliptycznym, jeżeli linia środków pierwszego jest osią pierwiastną drugiego.

4. Jeżeli mamy dane dwa pęki sprzężone, wówczas punkty graniczne jednego są punktami podstawowymi drugiego pęku.

5. Dane są dwa punkty graniczne pęku hiperbolicznego; zbudować taki pęk.

6. Dane jest jedno koło pęku hiperbolicznego i jeden punkt graniczny; zbudować pęk.

7. Mamy dane dwa koła pęku hiperbolicznego; zbudować to koło pęku, które przechodzi przez dany punkt A . [Wskazówka: przez dany punkt A kreślimy dowolne koło C , przecinające dwa dane koła, środek pierwiastny trzech kół łączymy z punktem A].

8. W pęku hiperbolicznym punkty graniczne są harmonicznie sprzężone z końcami każdej średnicy, leżącej na linii środków.

9. Rozwiązać zadanie 7, opierając się na zadaniu 8-ym.

10. Rozwiązać zadanie 7, jeżeli zamiast dwóch kół pęku mamy daną oś pierwiastną pęku i jeden z jego punktów granicznych.

11. Mamy dane dwa pęki eliptyczne takie, że ich punkty podstawowe A, B oraz A', B' leżą na jednej prostej. Dowieść, iż wspólne cięciwy kół obu pęków przecinają się wszystkie w jednym punkcie, leżącym na prostej AA' .

12. Koła pęku eliptycznego dzielą na odcinki proporcjonalne każdą sieczną, poprowadzoną przez jeden z punktów podstawowych pęku.

13. Dane są punkty podstawowe pęku eliptycznego oraz koło $(O)r$, nie należące do pęku; zbudować to koło pęku, które przecina pod kątem prostym koło $(O)r$.

14. Zbudować koło, należące do danego pęku i styczne do danego koła $(O)r$.

15. Jeżeli prosta przecina dwa koła pęku w punktach A, B oraz A', B' , oś zaś pierwiastną w punkcie C , wówczas odcinki AA', BB' widać pod kątem prostym ze wszystkich punktów okręgu, którego środkiem jest O i które przecina pod kątem prostym oba koła dane.

16. Niech będzie dany pęk hiperboliczny i dowolny stały punkt A ; dowieść, że biegunowe punktu A względem wszystkich kół pęku przechodzą przez stały punkt A' . Punkt ten jest średnicowo przeciwległy punktowi A w kole ALL' , gdzie L i L' są punktami granicznymi pęku. [Wskazówka: jeżeli dwa koła przecinają się pod kątem prostym, wówczas każde z nich dzieli harmonicznie średnicę drugiego koła].

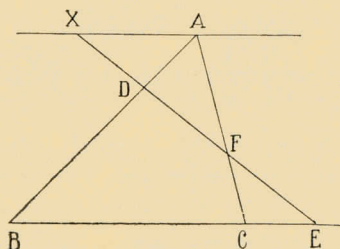
17. Biegunowa punktu granicznego względem dowolnego koła pęku przechodzi przez drugi punkt graniczny.

ROZDZIAŁ III.

O poprzecznych.

§ 271. **Twierdzenie Menelaosa.*)** Jeżeli przełniemy trójkąt $\triangle ABC$ dowolną prostą DEF , wówczas otrzymamy na jego bokach lub na ich przedłużeniach sześć odcinków, rachując od wierzchołków trójkąta, przy czym iloczyn trzech odcinków, nie mających wspólnych końców, równa się iloczynowi trzech drugich odcinków czyli

$$AD \cdot BE \cdot CF = AF \cdot CE \cdot BD.$$



Rys. 237.

Przez A poprowadzimy równoległą do boku BC . Niech poprzeczna spotyka tę równoległą w punkcie X . Z trójkątów podobnych (jakich?) mamy:

$$\frac{CF}{CE} = \frac{AF}{AX},$$

$$\frac{BE}{BD} = \frac{AX}{AD}.$$

Skąd przez pomnożenie mamy

$$\frac{CF \cdot BE}{CE \cdot BD} = \frac{AF}{AD}.$$

czyli

$$AD \cdot BE \cdot CF = AF \cdot CE \cdot BD.$$

§ 272. **Twierdzenie przeciwne** (względem § 271). Jeżeli na bokach trójkąta $\triangle ABC$ lub na ich przedłużeniach mamy dane trzy punkty D, E, F nie leżące na jednej prostej, wówczas iloczyn odcinków $AD \cdot BE \cdot CF$ nie może równać się iloczynowi trzech pozostałych odcinków $AF \cdot CE \cdot BD$.

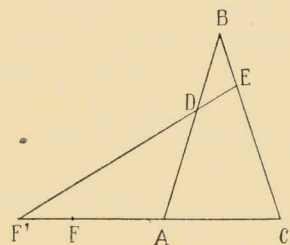
Istotnie, jeżeli prosta DE przecina bok AC (lub jego przedłużenie) w punkcie F' , mamy wówczas

$$AD \cdot BE \cdot CF' = AF' \cdot CE \cdot BD$$

$$\text{czyli } \frac{AD \cdot BE}{CE \cdot BD} = \frac{AF'}{CF'} \dots \dots (1)$$

Gdybyśmy mieli, wbrew naszemu twierdzeniu,

$$AD \cdot BE \cdot CF = AF \cdot CE \cdot BD,$$



Rys. 238.

*) Matematyk aleksandryjski; żył i działał za panowania Trajana i Domicjana (koniec I wieku po Chr.).

$$\text{wówczas byłoby } \frac{AD \cdot BE}{CE \cdot BD} = \frac{AF}{CF} \dots \dots \dots (2).$$

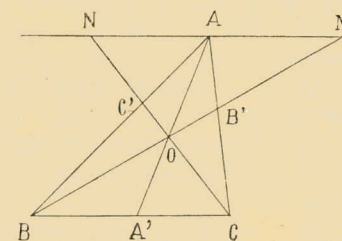
Z równości (1) i (2) wynikałoby, że

$$\frac{AF'}{CF'} = \frac{AF}{CF}$$

czyli na odcinku AC istniałyby dwa punkty F, F' , dzielące go oba wewnętrznie (lub oba zewnętrznie) w tym samym stosunku, co jest rzeczą niemożliwą.

§ 273. **Twierdzenie Cevy.*)** Jeżeli proste, łączące wierzchołki trójkąta $\triangle ABC$ z dowolnym punktem O , przecinają przeciwległe boki trójkąta w punktach A', B', C' , wówczas iloczyn trzech odcinków, nie mających wspólnych końców $AC' \cdot BA' \cdot CB'$ równa się iloczynowi trzech pozostałych odcinków $A'C \cdot B'A \cdot C'B$.

Przez wierzchołek A poprowadzimy równoległą do boku BC . Niech N, M będą punktami przecięcia się tej równoległej z prostymi BB', CC' . Z podobieństwa trójkątów (jakich?) mamy



Rys. 239.

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{AM}{NA},$$

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{BC}{AM},$$

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{NA}{BC}.$$

Skąd przez pomnożenie wynika, że

$$AC' \cdot BA' \cdot CB' = A'C \cdot B'A \cdot C'B.$$

§ 274. **Twierdzenie odwrotne** (względem § 273). Jeżeli na bokach trójkąta mamy dane takie trzy punkty A', B', C' , iż

$$AC' \cdot BA' \cdot CB' = A'C \cdot B'A \cdot C'B,$$

wówczas proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie.

Jakoż niech proste AA', BB' przecinają się w punkcie O i niech prosta CO przecina bok przeciwny w punkcie X' . Na zasadzie tw. Cevy powinno być

*) Jan Ceva, wybitny matematyk włoski dowiódł tego twierdzenia wraz z wieloma innymi zapomocą rozważań, opartych na mechanice, w dziele *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio*, w 1678 r.

$$AX' \cdot BA' \cdot CB' = A'C \cdot B'A \cdot X'B,$$

zatem musi być również

$$\frac{AX'}{X'B} = \frac{AC'}{C'B}$$

czyli na boku AB istnieją dwa punkty C' i X' , dzielące ten bok wewnątrz w tym samym stosunku, co jest niedorzeczne.

Ćwiczenia XLV. Twierdzenia Menelaosa i Cevy wraz z twierdzeniami odwrotnymi (lub przeciwnymi) dają nam nowy sposób rozpoznawania, czy trzy dane punkty leżą czy nie leżą na jednej prostej, oraz czy trzy dane proste przecinają się w jednym punkcie.

1. Dowieść, że dwusieczne trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

2. Dowieść, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

3. Dowieść, że wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

4. Proste, łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności koła wpisanego, przecinają się w jednym punkcie (punkt Gergonne'a).

5. Proste, łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności tego samego koła zawpisanego, przecinają się po trzy w jednym punkcie (t. zw. punkty dołączone Gergonne'a).

6. Proste, łączące wierzchołki trójkąta z punktami, w których przeciwległe im boki dotykają kół zawpisanych, przecinają się w jednym punkcie (t. zw. punkt Nagela).

7. Spodki trzech dwusiecznych zewnętrznych trójkąta leżą na jednej prostej.

8. Spodki dwóch dwusiecznych wewnętrznych i trzeciej zewnętrznej leżą na jednej prostej.

9. Dowieść istnienia prostej Simsona (ćwiczenia XIX, 36 str. 110) za pomocą tw. odwrotnego do Menelaosa.

10. **Tw. Ponceleta.** Jeżeli wierzchołki wielokąta o nieparzystej liczbie boków połączymy z dowolnym punktem, otrzymamy na przeciwległych jego bokach takie odcinki, iż iloczyn wszystkich odcinków, nie mających wspólnych końców, równa się iloczynowi pozostałych odcinków.

11. Środki przekątnych czworoboku zupełnego leżą na jednej prostej.

12. Jeżeli mamy dane trzy koła, wówczas każda para posiada po dwa środki jednokładności. Te środki jednokładności leżą po trzy na czterech prostych, zwanych osiami jednokładności trzech kół danych, a mianowicie: trzy środki jednokładności zewnętrzne leżą na jednej osi, a prócz tego każdy środek zewnętrzny leży na jednej osi z dwoma środkami wewnętrznymi, nie sprzężonymi z nim.

W ten sposób osie jednokładności są bokami czworoboku zupełnego, którego przekątnymi są linie środków kół danych.

13. **Twierdzenie Pascala.** (Porównaj str. 241, § 247). Jeżeli mamy dany sześciokąt wpisany w koło, wówczas punkty przecięcia się trzech par przeciwległych boków leżą na jednej prostej. [Wskazówka: do trójkąta, utworzonego przez punkty przecięcia się trzech par boków (a, c) , (c, e) , (e, a) stosujemy trzykrotnie tw. Menelaosa, uważając trzy pozostałe boki za poprzeczne].

14. Z wierzchołków trójkąta $\triangle ABC$ prowadzimy trzy proste AA' , BB' , CC' , przecinające się w jednym punkcie. Jeżeli punkty A'' , B'' , C'' są symetryczne z punktami A' , B' , C' względem środków boków a , b , c , wówczas proste AA'' , BB'' , CC'' przecinają się też w jednym punkcie.

15. W trójkącie foremnym $\triangle ABC$ odkładamy na bokach c , b odcinki $AC' = CB' = k$; prosta BC' przecina w punkcie A' prostą BC . Obliczyć długość odcinka BA' .

16. W trójkącie $\triangle ABC$ dzielimy boki a , b , c odpowiednio w punktach A' , B' , C' w stosunku $m:n$. Jeżeli proste CC' , AA' przecinają się w punkcie K , wówczas mamy

$$AK : AA' = mn : (m^2 - mn + n^2).$$

ROZDZIAŁ IV.

O zastosowaniu algebry do rozwiązywania zadań konstrukcyjnych.

§ 275. Zadanie konstrukcyjne da się zawsze sprowadzić do wyznaczenia jednego lub kilku punktów. Punkt możemy znaleźć, jeżeli znamy jego odległości od dwóch stałych punktów. Często się zdarza, że z warunków zadania możemy łatwo obliczyć te odległości, a wówczas rozwiązanie zadania konstrukcyjnego sprowadza się do następującego zagadnienia: *zbudować odcinek, mając dany wzór, który wyraża zależność między odcinkiem szukany a innymi, danymi odcinkami.*

Przekonamy się zaraz, że zadanie to potrafimy rozwiązać za pomocą cyrkla i linjału, o ile związek między odcinkiem szukany a odcinkami danymi wyraża się równaniem 1-go lub 2-go stopnia (innymi słowami: o ile odcinek szukany jest funkcją stopnia 1-go lub 2-go odcinków danych).

§ 276. Istotnie, jeżeli między odcinkiem x a odcinkami danymi zachodzi związek 1-ego stopnia, wówczas możemy zawsze sprowadzić go do postaci

$$\begin{aligned} ax &= b \\ \text{czyli} \quad x &= \frac{b}{a} \\ \text{albo inaczej:} \quad \frac{x}{1} &= \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Jak widzimy, odcinek szukany x jest odcinkiem czwartym proporcjonalnym względem odcinków $a, b, 1$, odcinek zaś czwarty proporcjonalny budować umiemy.

§ 277. Jeżeli związek między odcinkiem x a odcinkami danymi wyraża się równaniem 2-go stopnia, wówczas możemy mu nadać jedną z czterech następujących postaci:

$$\begin{aligned} x^2 - px + q^2 &= 0 \dots (1) \\ x^2 + px + q^2 &= 0 \dots (2) \\ x^2 - px - q^2 &= 0 \dots (3) \\ x^2 + px - q^2 &= 0 \dots (4), \end{aligned}$$

gdzie p i q^2 są to liczby znane, przyczym p uważamy zawsze za liczbę dodatnią.

Formy (1) i (2) odpowiadają przypadkowi, gdy pierwiastki równania x_1, x_2 mają znaki zgodne: w równaniu (1) oba są dodatnie, w równaniu (2) oba ujemne. Jak w jednym, tak i w drugim wypadku mamy

$$p = x_1 + x_2, \quad q^2 = x_1 \cdot x_2,$$

zatem wyznaczenie odcinka x sprowadza się do zadania:

(I) znaleźć dwa odcinki (x_1 i x_2), mając daną ich sumę i iloczyn.

W równaniach (3) i (4) pierwiastki mają znaki przeciwne, a mianowicie w równaniu (3) większym co do wartości bezwzględnej jest pierwiastek dodatni, w równaniu zaś (4) większym jest pierwiastek ujemny. W każdym razie, w jednym czy w drugim przypadku mamy zawsze

$$p = |x_1| - |x_2|, \quad q^2 = |x_1 x_2| *$$

*) Symbol $|a|$ czytamy: „wartość bezwzględna liczby a ”.

Możemy tedy powiedzieć, że w przypadku równań (3) i (4) wyznaczenie bezwzględnych wartości odcinków x_1 i x_2 , będących pierwiastkami tych równań, sprowadza się do zadania:

(II) zbudować dwa odcinki, mając daną ich różnicę i iloczyn.

Rzecz oczywista, że po znalezieniu bezwzględnej wartości tych odcinków, wypadnie uwzględnić fakt, że powinny one mieć zwroty przeciwne.

Rozwiążemy teraz kolejno oba te podstawowe zadania.

§ 278. Zadanie I. Zbudować dwa odcinki, których suma p i iloczyn q^2 są dane.

Mamy do wyboru kilka rozwiązań. Możemy np. postąpić w sposób następujący.

Na średnicy $AB = p$ kreślimy koło, przez A prowadzimy styczną i na niej odkładamy $AC = q$. Jeżeli poprowadzimy prostą CE równoległą od AB , otrzymamy żądane rozwiązanie, gdyż

$$CD + CE = AB = p$$

(jak łatwo widzieć, jeżeli poprowadzimy styczną BF),

a zarazem $CD \cdot CE = AC^2 = q^2$.

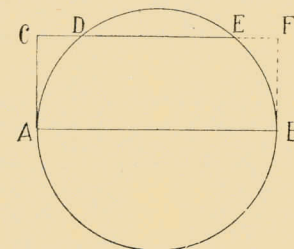
Czy zadanie jest zawsze możliwe?

§ 279. Zadanie II. Zbudować dwa odcinki, których różnica p i iloczyn q^2 są nam dane.

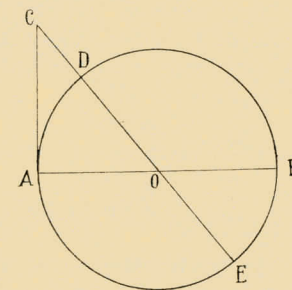
Niech będzie dane koło o średnicy $AB = p$. W punkcie A kreślimy styczną i na niej odkładamy $AC = q$, poczym punkt C łączymy ze środkiem O koła. Odcinki CD, CE , otrzymane na tej siecznej, czynią zadość warunkom zadania, gdyż

$$\begin{aligned} DE &= AB = p, \\ CD \cdot CE &= AC^2 = q^2. \end{aligned}$$

§ 280. Zadanie III. Dany odcinek a podzielić na dwie części tak,



Rys. 240.



Rys. 241.

by większa z nich była średnią proporcjonalną między całym odcinkiem a mniejszą częścią.

Taki podział zwie się *podziałem złotym* albo *podziałem w stosunku skrajnym i średnim*.

Większą z dwóch części odcinka a nazywają też niekiedy *częścią złotą* tego odcinka.

Oznaczmy część złotą przez x . Mamy wówczas

$$x^2 = a(a - x)$$

czyli

$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

Sprawdziliśmy więc nasze zadanie do typu zadania II.*)

Ma ono dwa rozwiązania, których sens z łatwością uprzytomnimy sobie po wykonaniu konstrukcji.

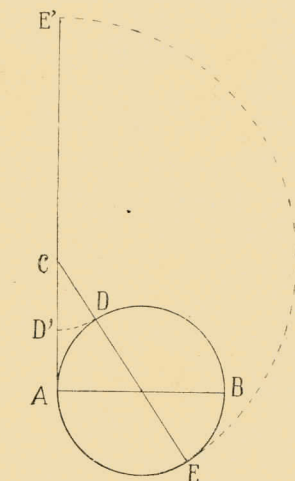
Budujemy tedy koło o średnicy $AB = a$, kreślimy styczną $AC = a$ (rys. 242) i mamy

$$|x_1| = CD, |x_2| = CE.$$

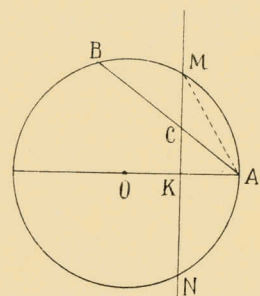
Pozostaje odłożyć te odcinki na prostej AC w przeciwnych zwrotach, poczynając od punktu C . Otrzymujemy punkty D i D' , które oba dzielą odcinek dany CA w stosunku złotym: jeden dzieli go wewnątrz, drugi zewnątrz.

Zadanie IV. Dane jest koło $(O)A$ i cięciwa MN , prostopadła do promienia OA w jego środku. Przez punkt A należy poprowadzić sieczną AB tak, żeby odcinek jej BC równał się danemu odcinkowi a (rys. 243).

Zakładamy, że figura na rys. 243 czyni zadość warunkom zadania.



Rys. 242.



Rys. 243.

*) Rzecz prosta, że po otrzymaniu równania powinniśmy się najpierw przekonać, czy ma ono pierwiastki rzeczywiste. W danym wypadku jest to oczywiste (dlaczego?)

Niech będzie:

$$AC = x, KC = y,$$

$$BC = a, MK = m, OA = r.$$

Mamy (dlaczego?)

$$(m + y) \cdot (m - y) = ax \dots \dots \dots (1)$$

oraz $y^2 = x^2 - \frac{1}{4}a^2 \dots \dots \dots (2)$

skąd $m^2 + \frac{1}{4}a^2 - x^2 = ax \dots \dots \dots (3)$

zważywszy zaś, że z trójkąta $\triangle AKM$ mamy (dlaczego?)

$$m^2 + \frac{1}{4}a^2 = r^2,$$

otrzymujemy ostatecznie

$$x^2 + ax - r^2 = 0 \dots \dots \dots (4)$$

tak iż zadanie sprowadziliśmy do typu zadania II.

Uczeń sam przeprowadzi konstrukcję i zbada, czy oba pierwiastki równania czynią zadość warunkom zadania.

Ćwiczenia XLVI. 1. Zbudować odcinek x , odpowiadający któremukolwiek z następujących wzorów, w których a, b, c są odcinkami danymi: (1) $x^2 = ab$; (2) $x = ab$; (3) $ax = bc$; (4) $x^2 = a^2 + b^2$; (5) $x^2 = a^2 - b^2$; (6) $x^2 = a^2 + b^2 - c^2$.

2. Trójkąt $\triangle ABC$ przeciąć poprzeczną MN tak, żeby było $MN \parallel AB$ oraz $CM - NB = f$, gdzie f jest odcinkiem danym.

3. Przez punkt A wewnątrz koła leżący poprowadzić cięciwę XY tak, żeby było $XY \cdot AX = m^2$, gdzie m jest liczbą daną.

4. W trójkącie $\triangle ABC$ poprowadzić $MN \parallel AB$ tak, żeby było $AM^2 + BN^2 = m^2$.

5. Z punktu zewnętrznego A poprowadzić do danego koła sieczną tak, żeby jej odcinek zewnętrzny był trzy razy mniejszy od wewnętrznego.

6) Wykazać, że rozwiązanie równań typu (1) i (2) w § 277 (str. 280) możemy otrzymać w sposób następujący: niech będzie $AB = p$; w punktach A i B wystawiamy prostopadłe, leżące po tej samej stronie prostej AB , na nich odkładamy $AC = m$, $BD = n$, gdzie m, n są to dwie liczby, których iloczyn równa się q^2 ; wreszcie na średnicy CD kreślimy półkole, przecinające AB w punkcie E . Odcinki AE, EB są pierwiastkami równania (1) lub (2).

7. Znaleźć konstrukcję, analogiczną do poprzedniej i dającą pierwiastki równań (3) i (4) w § 277.

8. Zbudować taki odcinek x , żeby dany odcinek a był jego częścią złotą.

9. Dane są odcinki a i b ; podzielić a na takie dwie części, by jedna z nich była średnią proporcjonalną między drugą częścią i odcinkiem b .

10. Na boku b trójkąta $\triangle ABC$ znaleźć taki punkt X , żeby, prowadząc $XY \parallel AB$, otrzymać związek $AX^2 = XY \cdot AB$.

11. Przez punkt A , leżący wewnątrz koła, poprowadzić cięciwę tak, by w punkcie A została ona podzielona w stosunku skrajnym i średnim.

Zbudować trójkąt prostokątny, mając dane

12. $h_c, r_a - r_b$; 13. b, r_a ; 14. $c + b, r_b$; 15. $a + r_a, c$.

16. Dany jest prostokąt $ABCD$; równoległe do jego boków poprowadzić proste, któreby wyznaczyły prostokąt o polu 2 razy mniejszym (lub większym) od danego.

17. Dany trójkąt przeciąć poprzeczną tak, by podzielić na połowy zarówno jego obwód, jak i pole.

18. Dane jest koło $(O)r$. Znaleźć taki punkt X , żeby suma stycznych $XA + XB$ równała się siecznej XOY .

19. Na średnicy AOB odkładamy $OC = OD = a$; znaleźć na okręgu taki punkt M , żeby było $OM^2 = MC \cdot MD$.

20. Dane są na płaszczyźnie dwie proste KL, MN ; zbudować trójkąt tak, by podstawa jego leżała na prostej KL i równała się danemu odcinkowi c , przeciwległy wierzchołek C żeby leżał na prostej MN i żeby podstawa była średnią arytmetyczną dwu drugich boków trójkąta.

21. Newton, który napisał pierwszy podręcznik, traktujący w sposób systematyczny o zastosowaniu algebry do zadań geometrycznych, podaje następujące ćwiczenie: basen czworokątny $ABCD$ otoczyć ze wszystkich stron ścieżką, która miałaby wszędzie jednakową szerokość i pole równające się danej liczbie a^2 .

22. Zadanie Pappusa. Dany jest kąt prosty i punkt A na jego dwusiecznej; przez A poprowadzić prostą tak, by odcinek jej, zawarty między ramionami koła prostego, równał się danemu odcinkowi m . [Wskazówka: niech O będzie wierzchołkiem kąta prostego, B punktem przecięcia się poprzecznej z ramieniem kąta za niewiadomą obieramy $OB = x$ i otrzymujemy równanie dwukwadratowe. Newton rozwiązuje to samo zadanie, obierając za niewiadomą odległość punktu O od środka poprzecznej].

ROZDZIAŁ V.

O wielokątach foremnych.

§ 281. Określenie. Foremnym nazywamy wielokąt, którego wszystkie boki i kąty równają się sobie.

Foremna nazywamy też każdą linję łamaną, której boki i kąty równają się sobie.

§ 282. Twierdzenie. Na każdym wielokącie foremym (lub ogólniej: na każdej łamanej foremnej) można opisać koło i w każdy wielokąt foremny (lub ogólniej: w każdą łamaną foremną) można wpisać koło.

1-o. Trzy kolejne wierzchołki wielokąta A_1, A_2, A_3 , wyznaczają koło.

Łatwo dostrzec, że na okręgu tego koła leży również następny wierzchołek A_4 .

Istotnie, środek O koła leży na osi symetrii OB_2 boku $A_2 A_3$, ale ta sama prosta OB_2 jest osią symetrii dwóch boków: $A_1 A_2$ i $A_3 A_4$, zatem A_4 leży na okręgu koła, przechodzącego przez A_1, A_2, A_3 . W taki sam sposób dowodzimy, że następny wierzchołek A_5 leży na tym samym okręgu, i t.d.

2-o. Ponieważ boki $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4 \dots$ są równymi cięciwami tego samego koła, zatem muszą być jednakowo odległe od jego środka O czyli musi być:

$$OB_1 = OB_2 = OB_3 = \dots$$

Tak więc punkt O jest zarazem środkiem koła, wpisanego w wielokąt.

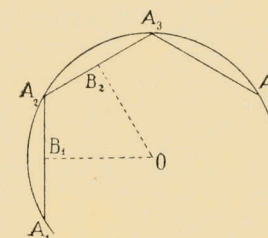
§ 283. Określenie. Promień koła wpisanego nazywają również *apotemą* wielokąta foremnego.

§ 284. Twierdzenie. Jeżeli przez r oznaczmy długość promienia koła opisanego na wielokącie, wówczas

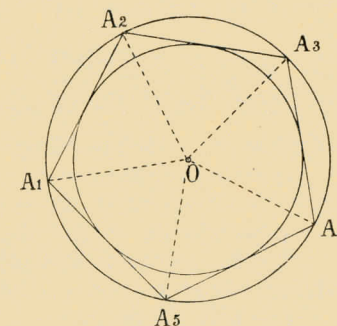
1-o długość boku sześciokąta foremnego $= r$,

2-o długość boku kwadratu $= r\sqrt{2}$,

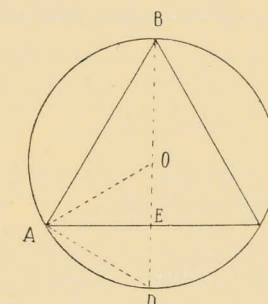
3-o długość boku trójkąta foremnego $= r\sqrt{3}$.



Rys. 244.

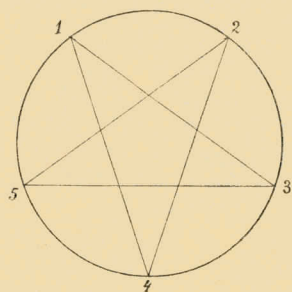


Rys. 245.



Rys. 246.

Dowód pozostawiamy czytelnikowi, nadmienając, że długość boku trójkąta foremnego można obliczyć z rysunku 246 na mocy twierdzenia § 267, str. 267.



Rys. 247.

§ 285. Oprócz wielokątów foremnych wypukłych, o których dotąd mówiliśmy, istnieją również *wielokąty foremne gwiaździste* (a więc wklęsłe). Jeżeli np., jak na rys. 247, podzielimy okrąg na 5 części równych i punkty podziału połączymy co drugi (t. j. punkt A_1 z punktem A_3 , dalej z punktem A_5 i t. d.), otrzymamy pięciokąt gwiaździsty.

Twierdzenie. Jeżeli podzieliliśmy okrąg koła na n części równych i połączymy punkty podziału co p , gdzie p jest liczbą pierwszą względem n , wówczas powstał wielokąt foremny o n bokach.

Dwa kolejne punkty podziału A_1, A_2 wyznaczają łuk, stanowiący $\frac{1}{n}$ -tą część okręgu, jeśli więc łączymy punkty podziału co p (t. j. punkt A_1 z A_{p+1}), wówczas bok łamanej musi być cięciwą łuku stanowiącego $\frac{p}{n}$ części okręgu (np. bok A_1A_3 pięciokąta wspiera łuk, równający się $\frac{2}{5}$ częściom okręgu).

Jeżeli na tej drodze mamy otrzymać wielokąt, wówczas łamana musi zamknąć się czyli po wykreśleniu, powiedzmy, k boków powinniśmy powrócić do punktu A_1 , z którego wyszliśmy.

Innymi słowami: wykreślając wszystkie k boków wielokąta, obchodzimy okrąg dokoła całkowitą ilość razy.

Tak więc liczba

$$\frac{kp}{n}$$

musi być liczbą całkowitą. Ponieważ liczby p i n są względem siebie pierwsze, zatem najmniejsza wartość na k , przy której $\frac{kp}{n}$ biera wartość całkowitą, est $k = n$.

W ten sposób dowiedliśmy, że wielokąt nasz ma istotnie n boków.

Uwaga. Gdyby liczby p i n nie były względem siebie pierwsze, gdyby np. było $p = da$, $n = db$, wówczas mielibyśmy

$$\frac{kp}{n} = \frac{kda}{db} = \frac{ka}{b},$$

gdzie a i b są już względem siebie pierwsze. Jesliby tedy liczba $\frac{ka}{b}$

miała być całkowitą, to najmniejszą wartością na k byłaby $k = b$. Tak więc wielokąt miałby nie n , lecz tylko b boków.

§ 286. **Twierdzenie.** Jeżeli mamy daną liczbę całkowitą n , wówczas wielokątów foremnym o n bokach istnieje dwa razy mniej, niż liczb pierwszych względem n i mniejszych od n .

Dowód twierdzenia zrozumiemy najlepiej na przykładzie. Niech będzie dana liczba całkowita $n = 15$. Wypiszmy wszystkie liczby pierwsze względem 15 i mniejsze od 15:

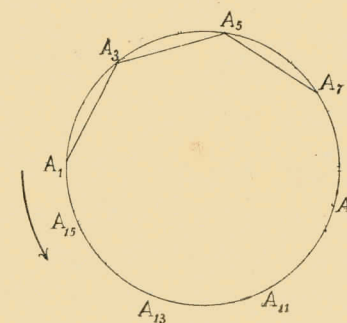
1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14.

Wyobraźmy sobie, że okrąg koła podzieliliśmy na 15 równych części. Na mocy § 285, wszystkie możliwe wielokąty foremne o 15 bokach otrzymamy, łącząc punkty podziału co

1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14.

Mielibyśmy tedy ośm piętnastokątów foremnym. Łatwo jednak przekonać się, iż każdy wielokąt został policzony dwa razy czyli że naprawdę istnieją tylko 4 różne piętnastokąty foremne.

Istotnie, jeżeli wykreślimy cięciwy A_1A_3, A_3A_5 i t. d., wówczas możemy powiedzieć, że połączyliśmy punkty co 2, gdyż A_3 jest drugim punktem, rachując od A_1 . Ale równie dobrze mógłby ktoś powiedzieć, że połączyliśmy punkty co 13, gdyż jeśli, poczynając od A_1 , będziemy rachowali punkty w kierunku, zaznaczonym strzałką na rys. 248, wówczas okaże się, że A_3 jest istotnie trzynastym punktem.



Rys. 248.

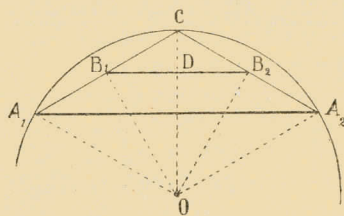
Tak samo, jeżeli wykreślimy cięciwy A_1A_5, A_5A_9 i t. d., wówczas możemy uważać, że połączyliśmy punkty co czwarty, ale równie dobrze możemy twierdzić, że połączyliśmy je co jedenasty.

Ogólnie: jeżeli, mając n punktów podziału, łączymy je co p , to jednocześnie następuje połączenie punktów co $n - p$.

§ 287. Z powyższego widzimy, że istnieją ogółem cztery piętnastokąty foremne: jeden wypukły i trzy gwiaździste. Uczeń przekona się sam, że dziesięciokątów mamy tylko dwa: jeden wypukły, drugi gwiaździsty. Tak samo pięciokąty istnieją tylko dwa, natomiast sześciokątów i czworokątów gwiaździstych nie ma wcale.

Pokażemy jeszcze sposób zbudowania dziesięciokąta i, co za tym idzie, pięciokąta i piętnastokąta foremnego.

1. Mamy dane $a_4 = 10$ cm.; obliczyć a_3 i a_6 .
2. $2p_3 = 12$ cm.; obliczyć $2p_4$ i $2p_6$.
3. Mając dane a_4 , obliczyć a_8 .
4. Mając dane a_6 , obliczyć a_{12} .
5. Obliczyć apotemy wielokątów foremnych wypukłych o 3, 4, 6, 8, 12 bokach.
6. Obliczyć pola tych samych wielokątów.
7. Mając dane a_3 , obliczyć b_3 .
8. Trójkąt i sześciokąt foremny mają ten sam obwód; w jakim stosunku pozostają do siebie ich boki? jaki jest stosunek promieni kół opisanych na obu wielokątach?
9. Trójkąt i sześciokąt foremny są sobie równoważne; jaki jest stosunek ich boków?
10. Wielokąty foremne o n bokach są do siebie podobne.
11. Obwody wielokątów foremnych o n bokach są proporcjonalne:
 - (1) do promieni kół opisanych;
 - (2) do apotem.
12. Pola wielokątów foremnych o n bokach są proporcjonalne
 - (1) do kwadratów promieni;
 - (2) do kwadratów apotem.
13. Porównać z sobą pola wpisanych i opisanych trójkątów i sześciokątów oraz wpisanych i opisanych kwadratów i ośmiokątów i spróbować utworzyć wzory, któreby dawały
 - (1) S_6 w zależności od S_3 i S'_3 ,
 - (2) S_8 „ „ „ „ S_4 i S'_4 ,
 - (3) S'_6 „ „ „ „ S_3 , S'_3 i S_6 ,
 - (4) S'_8 „ „ „ „ S_4 , S'_4 i S_8 .
14. Spostrzeżenia, uczynione w zadaniu poprzednim, uogólnić na dowolne wielokąty foremne, t. j. znaleźć wzory, wyrażające
 - (1) S_{2n} w zależności od S_n i S'_n ;
 - (2) S'_{2n} „ „ „ „ S_n , S'_n , S_{2n} .



Rys. 250.

nymi (od wyrazów: isos = równy, perimetron = obwód).

16. Jeżeli przez r_n i t_n oznaczymy odpowiednio promień i apotemę wielokąta foremnego o n bokach, wówczas między wielokątami izoperymetrycznymi zachodzą związki:

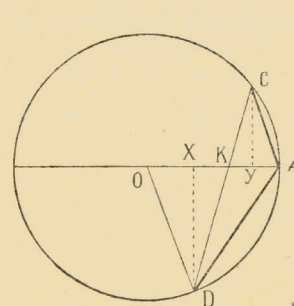
$$t_{2n} = \frac{t_n + r_n}{2}, \quad r_{2n} = \sqrt{r_n t_{2n}}$$

17. Dowieść, iż

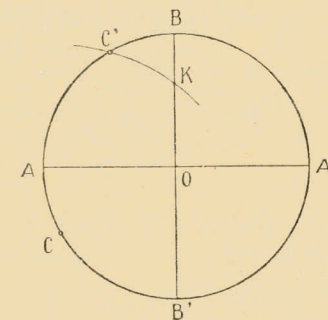
$$r_{2n} - t_{2n} < \frac{1}{4}(r_n - t_n).$$

[W s k a z ó w k a: kreślimy koło $(O)B_1$, aby otrzymać różnicę $r_{2n} - t_{2n}$ i prowadzimy dwusieczną kąta $\angle CB_1B_2$].

18. Mając dany promień r koła opisanego, obliczyć a_5 i a'_5 .
19. Mając dany promień r , obliczyć a_{15} , a'_{15} , a''_{15} , a'''_{15} .
20. W pięciokącie foremnym wypukłym każde dwie przekątne dzielą się w stosunku złotym, przyczem większy z dwóch odcinków przekątnej równa się bokowi pięciokąta.
21. W pięciokącie foremnym wypukłym przekątne przecinają się w taki sposób, że wyznaczają drugi pięciokąt foremny.
22. Uzasadnić następującą konstrukcję boku a_{10} : w kole $(O)A$ prowadzimy dwie prostopadłe do siebie średnice AOA' , BOB' ; niech O' będzie środkiem promienia OB i niech D będzie punktem przecięcia się koła $(O')O$ z odcinkiem AO' . Powiadam, że $A'D = a_{10}$.
23. Słynny matematyk Ptolomeusz*) podaje w swym wielkim dziele „Almageście” następującą konstrukcję pięciokąta: w kole $(O)A$ kreślimy dwie prostopadłe do siebie średnice AOA' , BOB' ; niech będzie C środek promienia OA ; kreślimy koło $(C)B$, które przecina promień OA' w punkcie D ; odcinek $BD = a_5$. Zbadać prawdziwość konstrukcji.
24. Wykazać, że konstrukcja Ptolomeusza daje zarazem bok dziesięciokąta wypukłego foremnego oraz bok pięciokąta gwiaździstego.
25. Dowieść, że $(a_5)^2 = (a_{10})^2 + (a_6)^2$. Dowód przeprowadzić trzema sposobami: (1) za pomocą rachunku, (2) za pomocą konstrukcji Ptolomeusza, (3) za pomocą rys. 251, w którym $AC = a_{10}$, $AD = a_5$.



Rys. 251.



Rys. 252.

*) Porówn. o nim uwagę na str. 262.

Wyobraźmy sobie, że mamy dane koło i dwa wielokąty foremne: jeden wpisany w koło, drugi opisany na nim; jeżeli zwiększać będziemy liczbę boków tych wielokątów, wówczas wydaje się niemal oczywistym, że kontury ich zbliżają się do okręgu, obszary zaś wielokątowe zbliżają się do obszaru koła. Powstaje tedy myśl traktowania koła jako granicy, do której dążą nasze wielokąty przy nieograniczonym zwiększaniu liczby boków.

Aby ten pomysł zastosować, musimy najpierw przekonać się, czy granice, o których mowa, naprawdę istnieją, a w tym celu musimy mieć dwa nieskończone ciągi odcinków (pół), czyniących zadość wymaganiom pewnika VI-e, mianowicie:

- (1) wyrazy jednego ciągu muszą rosnać, drugiego zaś maleć;
- (2) wyrazy pierwszego ciągu muszą być zawsze mniejsze od wyrazów drugiego ciągu;
- (3) różnica między wyrazami obu ciągów musi maleć nieograniczenie.

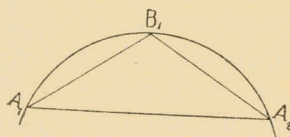
Innymi słowami, będziemy musieli ustalić trzy twierdzenia:

- (1) obwody (pola) wielokątów foremnych wpisanych rosna, opisanych zaś maleją;
- (2) obwody (pola) wielokątów foremnych wpisanych pozostają mniejsze od obwodów (pół) wielokątów opisanych;
- (3) różnica między obwodami (polami) wielokątów wpisanych i opisanych może być uczyniona dowolnie małą.

Jeżeli uda się nam dowieść tych trzech prawd, wówczas na mocy pewnika VI-e będziemy mogli twierdzić, że istnieje odcinek, większy od obwodów wszystkich wielokątów foremnych wpisanych, a mniejszy od obwodów wszystkich wielokątów foremnych opisanych. Wtedy dopiero będziemy mogli długość tego odcinka nazwać długością okręgu. To samo powiedzieć można o polu koła.

§ 292. Twierdzenie. *Przy podwajaniu liczby boków wielokątów foremnych, obwód wielokąta wpisanego rośnie, opisano zaś maleje.*

Cheąc podwoić liczbę boków wielokąta foremnego wpisanego, dzielimy na połowy wszystkie łuki, podparte przez jego boki. W ten sposób



Rys. 254.

bok A_1A_2 zastępujemy przez łamaną $A_1B_1A_2$ i przez to samo zwiększamy obwód wielokąta. To samo da się powiedzieć o każdym innym boku.

Cheąc podwoić liczbę boków wielokąta foremnego opisanego, dzielimy na połowy łuki, rozwarłe między punktami styczności boków, i w punktach podziału (np. K) prowadzimy styczne. W pierwotnym wielokącie obwód składał się z łamanych w rodzaju $C_1A_2C_2$; teraz łamana ta została zastąpiona przez łamaną $C_1B_1B_2C_2$. Otóż pierwsza łamana jest sumą odcinków

$$C_1B_1 + B_1A_2 + A_2B_2 + B_2C_2,$$

druga zaś jest sumą odcinków

$$C_1B_1 + B_1B_2 + B_2C_2$$

a więc druga łamana jest krótsza (dlaczego?).

§ 293. Twierdzenie. *Obwód wielokąta foremnego wpisanego jest mniejszy od obwodu jakiegokolwiek wielokąta foremnego opisanego na tym samym kole.*

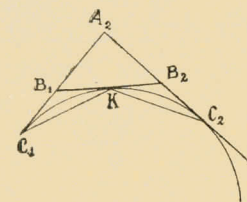
Wystarczy dowieść twierdzenia dla wielokątów o jednakowej liczbie boków.

Niech będzie dany wielokąt foremny wpisany $A_1A_2A_3\dots A_n$. Odpowiedni wielokąt opisany otrzymamy, prowadząc styczne w wierzchołkach pierwszego wielokąta. Otrzymujemy w ten sposób szereg trójkątów $\triangle A_1B_1A_2$, $\triangle A_2B_2A_3$, ..., z których wynika, że

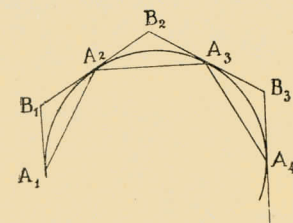
$$\begin{aligned} A_1B_1 + B_1A_2 &> A_1A_2 \\ A_2B_2 + B_2A_3 &> A_2A_3 \end{aligned}$$

a więc obwód wielokąta $B_1B_2B_3\dots B_n$ jest większy od obwodu wielokąta $A_1A_2A_3\dots A_n$.

Obierzmy sobie teraz dowolną prostą, na niej punkt O i odłóżmy ciąg odcinków OA_1 , OA_2 , OA_4 , ..., równających się obwodom wielokątów wpisanych On , $2n$, $4n$, ...



Rys. 255.



Rys. 256.

bokach, oraz ciąg odcinków $OC_1, OC_2, OC_3, \dots$ równających się obwodom odpowiednich wielokątów opisanych.

Na mocy § 292 możemy twierdzić, że punkty $A_1, A_2, A_3, \dots$ posuwają się coraz dalej w prawo, punkty zaś $C_1, C_2, \dots$ posuwają się coraz dalej w lewo. Ponieważ, dowiedliśmy

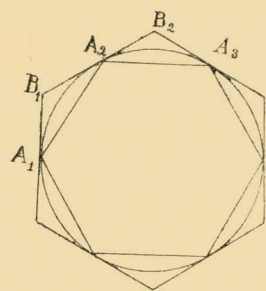


Rys. 257.

(w § 273), że $OA_k < OC_k$, zatem każdy punkt A_k leży w lewo od C_k , a więc wszystkie punkty A leżą w lewo od punktów C^* .

Pozostaje do rozstrzygnięcia jedno tylko pytanie: czy odległość między punktami A i C może być uczyniona dowolnie małą? Odpowiedź na to pytanie dają dwa następujące twierdzenia:

§ 294. Twierdzenie. Różnica między obwodami wielokątów foremnych o n bokach, z których jeden jest wpisany w koło, drugi opisany na nim, jest mniejsza od wysokości trójkąta równoramiennego, którego podstawą jest obwód kwadratu opisanego, kąt zaś przy podstawie równa się $\frac{180^\circ}{n}$.



Rys. 258.

Konstrukcję, na której oprzemy dowód, można najprościej i najjaśniej opisać w sposób następujący: wyobraźmy sobie, że oba wielokąty zrobione są z drutu; przecinamy drut w wierzchołku A_1 wielokąta wpisanego i całą figurę rozginamy tak, by wyprostować kontur wielokąta wpisanego. Otrzymamy wtedy figurę, złożoną z n małych trójkątów równoramiennych $\triangle A_1B_1A_2, \triangle A_2B_2A_3, \dots, \triangle A_nB_nA_1$.

*) Istotnie, gdyby punkt A_n wcisnął się między punkty C , mógłby następować tylko po takim punkcie C_m , gdzie $m > n$. Ale to jest niedorzeczne, gdyż punkt A_m , leżący w prawo od A_n (§ 292), musi leżeć w lewo od C_m (§ 293).

których podstawy tworzą jeden odcinek A_1A_1' , równający się obwodowi wielokąta wpisanego (rys. 259).*)

Łatwo przekonać się, że kąty przy podstawie każdego z tych trójkącików mają po $\frac{180^\circ}{n}$. Istotnie (rys. 258) mamy

$$\sphericalangle B_1A_2A_1 + \sphericalangle A_1A_2A_3 + \sphericalangle B_2A_2A_3 = 180^\circ,$$

$$\begin{aligned} \text{ale} \quad \sphericalangle A_1A_2A_3 &= \frac{180^\circ n - 360^\circ}{n} \\ &= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}, \end{aligned}$$

$$\text{zatem} \quad \sphericalangle B_1A_2A_1 + \sphericalangle B_2A_2A_3 = \frac{360^\circ}{n},$$

$$\text{skąd} \quad \sphericalangle B_1A_2A_1 = \frac{180^\circ}{n} \quad (\text{dlaczego?})$$

Jeżeli na rys. 259 przedłużymy boki A_1B_1 i B_nA_1' pierwszego i ostatniego trójkąta, otrzymamy trójkąt równoramienny

$$\triangle A_1CA_1', \text{ w którym kąty przy podstawie równają się } \frac{180^\circ}{n}.$$

Zbadajmy boki tego trójkąta. Z rys. 259 uczeń łatwo dostrzeże, że suma dwóch boków $A_1C + CA_1'$ równa się obwodowi wielokąta opisanego, trzeci zaś bok A_1A_1' równa się obwodowi wielokąta wpisanego. Otóż mamy (dlaczego?)

$$\begin{aligned} A_1C + CA_1' &< CK \\ CA_1' - KA_1' &< CK, \end{aligned}$$

gdzie CK jest wysokością trójkąta. Po dodaniu tych dwu nierówności, otrzymujemy

$$(A_1C + CA_1') - A_1A_1' < 2CK$$

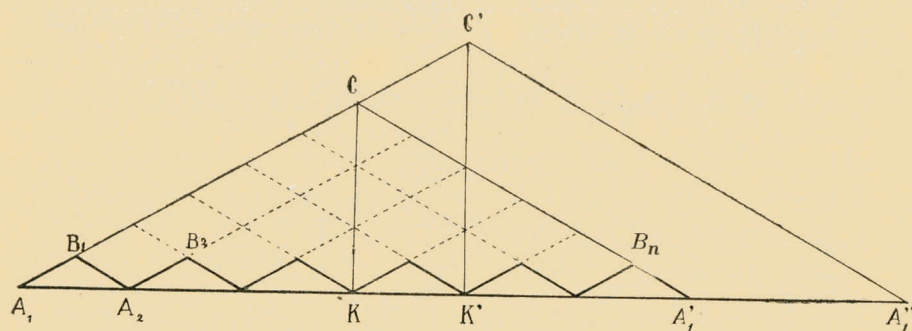
$$\text{czyli} \quad 2P_n - 2p_n < 2CK \dots \dots \quad (1)$$

Jeżeli na tej samej prostej odłożymy odcinek A_1A_1'' , równający się ośmiu promieniom koła O_1A_1 czyli równający się obwodowi kwadratu opisanego, wówczas odcinek ten okaże się dłuższym od A_1A_1' (dlaczego?) Zbudujmy na odcinku A_1A_1'' trójkąt $\triangle A_1CA_1''$, podobny do trójkąta

*) Całą tę konstrukcję uczeń opíše w zwykłym języku geometrii.

$\triangle A_1CA_1'$ (rys. 259). Wysokość jego $C'K'$ musi być większa od CK , zatem musi być

$$2P_n - 2p_n < 2C'K' \dots \dots \quad (2)$$



Rys. 259.

§ 295. Pozostaje już tylko jeden krok: musimy dowieść następującego twierdzenia:

Twierdzenie. Mając dany odcinek A_1A_2 , (równający się 8 promieniom koła), możemy na nim zbudować trójkąt równoramienny, którego kąt przy podstawie równa się $\frac{180^\circ}{n}$, wysokość zaś jest dowolnie mała.

Istotnie, niech będzie dany dowolnie mały odcinek m

Zbudujmy najpierw trójkąt równoramienny $\triangle A_1C''A_2$, którego

wysokość $C''K''$ równa się odcinkowi m . Na

zasadzie pewnika VIb

(pewnika Archimedesza dla

kątów) możemy znaleźć

tak wielką liczbę n , że $\frac{1}{n}$

część kąta półpełnego

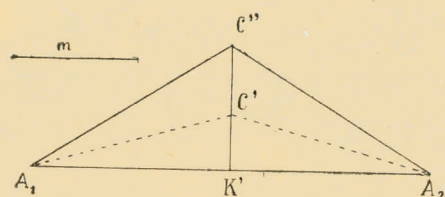
(czyli $\frac{180^\circ}{n}$) okaże się

mniejsza od kąta $\angle C''A_1A_2$, jakkolwiek mały byłby ten kąt.

Jeśli więc po obraniu tej liczby n zbudujemy kąt

$\angle C'A_1A_2 = \frac{180^\circ}{n}$, ramię jego A_1C' padnie wewnątrz kąta

$\angle C''A_1A_2$. Możemy więc istotnie zbudować trójkąt



Rys. 260.

$\triangle C'A_1A_2$ którego wysokość $C'K'$ okaże się mniejszą od $C''K''$, a więc i od danego odcinka m .

§ 296. Streśmy teraz całe to długie rozumowanie.

Na dowolnej prostej odłóżmy odcinki

$$OA_n = 2p_n, \quad OC_n = 2P_n,$$

$$OA_{2n} = 2p_{2n}, \quad OC_{2n} = 2P_{2n}$$

$$OA_{4n} = 2p_{4n}, \quad OC_{4n} = 2P_{4n}$$

$$\dots \dots \dots$$

(1) Na zasadzie § 292 możemy twierdzić, że punkty A posuwają się coraz dalej w prawo, punkty zaś C coraz dalej w lewo;

(2) Na zasadzie § 293 wiemy, że punkty A leżą zawsze w lewo od punktów C .

(3) Z §§ 294—295 wynika, że różnica między obwodami wielokątów wpisanych i opisanych maleje nieograniczenie czyli że, jakkolwiek mały byłby odcinek ϵ , możemy znaleźć taki punkt A_k i taki punkt C_k , iż odcinek A_kC_k będzie mniejszy od ϵ .

Teraz możemy (na mocy pewnika VI-e) twierdzić, że na prostej istnieje jeden i tylko jeden odcinek OB , większy od wszystkich obwodów wielokątów foremnych wpisanych i mniejszy od obwodów wielokątów foremnych opisanych.

Określenie. Długością okręgu nazywamy długość odcinka OB .

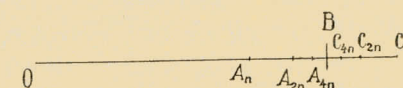
§ 297. W taki sam sposób, tylko o wiele łatwiej możemy ustalić pojęcie pola koła.

Jakoż rozpatrując te same ciągi wielokątów foremnych wpisanych i opisanych, mamy:

(1) Pola wielokątów wpisanych rosną, opisanych zaś maleją, jeżeli wciąż podwajamy liczbę ich boków (dlaczego?)

(2) Pola wielokątów wpisanych pozostają mniejsze od pól wielokątów opisanych (dlaczego?)

(3) Różnica między polami wielokątów wpisanych i opisanych jest mniejsza od pola trójkąta $\triangle A_1C'A_1''$ (rys. 259),



Rys. 261.

pole zaś tego trójkąta może być uczynione dowolnie małym, gdyż równa się ono iloczynowi $4r \cdot C'K'$, w którym czynnik $4r$ jest stały, drugi zaś czynnik $C'K'$ może być uczyniony dowolnie małym (§§ 294—295).

To nas upoważnia do twierdzenia, że istnieje jedna i tylko jedna liczba, większa od pól wielokątów foremnych wpisanych, mniejsza zaś od pól wielokątów foremnych opisanych.

Tę liczbę określamy jako pole koła.

§ 298. Twierdzenie. Długości okręgów mają się do siebie tak, jak promienie tych okręgów.

Niech będą dane dwa koła $(O)r$ i $(O')r'$. Oznaczmy długości ich okręgów odpowiednio przez c i c' . Powiadam, że mamy

$$\frac{c}{c'} = \frac{r}{r'}$$

Istotnie, mając dane trzy liczby r, r', c , możemy zawsze znaleźć jedną i tylko jedną taką liczbę d , że zachodzi proporcja:

$$r : r' = c : d.$$

Wpiszmy w oba koła wielokąty foremne o jednakowej liczbie boków. Wielokąty te są do siebie podobne, (ćwiczenie 10, str. 290). Jeśli więc obwody ich oznaczmy przez $2p, 2p'$, wówczas musi być (ćwiczenie 11, str. 290):

$$2p : 2p' = r : r'$$

$$\text{czyli} \quad 2p : 2p' = c : d$$

$$\text{skąd wynika, że} \quad 2p : c = 2p' : d.$$

Ponieważ w tej proporcji liczba c jest większa od $2p$ (dlaczego?), zatem liczba d musi być większa od $2p'$.

Dowiedliśmy więc, że liczba d jest większa od obwodu każdego wielokąta foremnego, wpisanego w koło $(O')r'$.

W taki sam sposób uczeń dowiedzie, że liczba d musi być mniejsza od obwodu każdego wielokąta foremnego, opisanego na kole $(O')r'$.

A skoro tak, to liczba d nie może być niczym innym, jak długością c okręgu tego koła, czyli musi być istotnie

$$c : c' = r : r'$$

§ 299. Twierdzenie. Stosunek długości okręgu do długości średnicy jest liczbą stałą.

Jakoż dowiedliśmy, że

$$c : c' = r : r',$$

zatem

$$c : c' = 2r : 2r'$$

albo

$$c : 2r = c' : 2r'.$$

Ten stały stosunek $c : 2r$ oznaczamy literą grecką π .

Mamy więc

$$c : 2r = \pi$$

czyli

$$c = 2\pi r,$$

co daje następującą

Regułę. Aby obliczyć długość okręgu, mnożymy długość jego średnicy przez stałą liczbę π .

§ 300. Z kolei przechodzimy do sposobu obliczania pola. Jakikolwiek wielokąt foremny opiszemy na kole, pole jego równać się będzie połowie iloczynu obwodu przez długość apotemy czyli przez promień koła

$$K = \frac{1}{2} (2p) \cdot r.$$

W tym iloczynie czynnik r jest stały, natomiast czynnik $2p$ dąży do długości okręgu c w miarę, jak podwajamy liczbę boków wielokąta, jest więc rzeczą wielce prawdopodobną, że zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie. Pole koła równa się połowie iloczynu długości okręgu przez długość promienia, czyli:

$$K = \frac{1}{2} c \cdot r = \pi r^2,$$

jeżeli przez K oznaczyliśmy pole koła.

Istotnie, gdyby iloczyn $\frac{1}{2} c \cdot r$ nie równał się polu koła, musiałby być albo mniejszy od tego pola, albo większy. Przypuśćmy najpierw, że jest on większy od pola koła.

Z § 297 wiemy, że różnica między polami wielokątów wpisanych i opisanych maleje nieograniczenie, tymbardziej więc możemy powiedzieć, że różnica między polem koła a polem wielokąta opisanego może być uczyniona dowolnie małą, mniejszą od jakiegokolwiek liczby zadanej ϵ .

Jeśli tedy przypuścimy, że

$$\frac{1}{2} c \cdot r - K = \varepsilon,$$

to będziemy mogli znaleźć taki wielokąt foremny opisany, którego pole zawierać się będzie między K i $\frac{1}{2} c \cdot r$. Oznaczając pole tego wielokąta przez S , obwód jego przez $2P$, mielibyśmy

$$\frac{1}{2} cr > S > K$$

czyli

$$\frac{1}{2} c \cdot r > \frac{1}{2} (2P) \cdot r > K,$$

co jest niedorzeczne, gdyż c jest napewno mniejsze od $2P$.

Tak samo, jeżeli przypuścimy, że iloczyn $\frac{1}{2} cr$ jest mniejszy od pola koła, będziemy mieli:

$$K - \frac{1}{2} cr = \partial.$$

Otóż możemy znaleźć wielokąt foremny wpisany, którego pole różni się od pola koła dowolnie mało, mniej niż o ∂ , zatem, oznaczając pole tego wielokąta przez s , obwód jego przez $2p$ i apotemę przez a , mielibyśmy

$$K > s > \frac{1}{2} cr$$

czyli

$$K > \frac{1}{2} (2p) \cdot a > \frac{1}{2} c \cdot r,$$

co znów jest niedorzeczne, gdyż mamy:

$$2p < c$$

oraz

$$a < r.$$

Tak więc pole koła, nie mogąc być ani mniejsze, ani większe od $\frac{1}{2} cr$, musi równać się temu iloczynowi.

§ 301. Pozostaje do rozstrzygnięcia pytanie: w jaki sposób można obliczyć liczbę π ?

Otóż przedewszystkim musimy zaznaczyć, że liczba π jest niewymierna*), zatem nie da się nigdy wyrazić w postaci ułamka skończonego. Co się tyczy sposobów obliczania wartości przybliżonych na π , to niektóre tylko z nich należą do dziedziny matematyki elementarnej.

Najprostszy pod względem pomysłu jest sposób Archimedes'a.**). Wpiszmy w koło dowolny wielokąt foremny o n bokach i opiszmy na nim drugi wielokąt również o n bokach. Kładąc $r = 1$, obliczmy obwody obu wielokątów; następnie podwójmy liczbę ich boków, obliczmy obwody nowych wielokątów, i t. d. Otrzymamy dwa ciągi liczb, między którymi zawarta jest długość okręgu czyli liczba 2π , gdyż założyliśmy $r = 1$.

Mamy w ten sposób:

$$\begin{aligned} 2p_6 &= 6 < 2\pi < 6,928 = 2P_6 \\ 2p_{12} &= 6,212 < 2\pi < 6,430 = 2P_{12} \\ 2p_{24} &= 6,266 < 2\pi < 6,320 = 2P_{24} \\ 2p_{48} &= 6,278 < 2\pi < 6,292 = 2P_{48} \\ 2p_{96} &= 6,282 < 2\pi < 6,286 = 2P_{96} \\ &\text{i t. d.} \end{aligned}$$

Poprzestając na wielokątach o 96 bokach, mamy:

$$3,141 < \pi < 3,143.$$

Archimedes znalazł następujące granice dla π :

$$3 \frac{1}{7} > \pi > 3 \frac{10}{71}.$$

W praktyce wystarczają zazwyczaj wartości przybliżone 3,14 lub $3 \frac{1}{7}$.

*) Fakt ten został ustalony dopiero w XVIII w. przez matematyka szwajcarskiego Lamberta i francuskiego Legendre'a. Dowodu nie możemy tu przytoczyć; ciekawych odsyłamy do książki: *Rudio Vier Abhandlungen über die Kreismessung*. Leipzig 1892.

**) Archimedes z Syrakuz (287—211 r. przed Chr.) pierwszy podał metodę obliczania przybliżonych wartości na π . Rozprawka Archimedes'a „O pomiarze koła” była drukowana w przekładzie polskim w czasopiśmie matematycznym „Wektor”, rocznik II, 1912 r.

Dla ciekawości podajemy wartość na π z dziesięcioma znakami dziesiętnymi:

$$\pi = 3,1415926535 \dots$$

§ 302. Bardzo ładny sposób elementarny obliczania π możemy oprzeć na ćwiczeniu 15, str. 290. Jest to t. zw. *metoda figur równo-obwodowych*.

Jeżeli apotemę wielokąta foremnego o n bokach oznaczmy przez a , promień koła na nim opisanego przez r , apotemę zaś i promień wielokąta foremnego, mającego ten sam obwód, lecz dwa razy więcej boków, oznaczmy odpowiednio przez a' i r' , wówczas będziemy mieli wzory

$$a' = \frac{r + a}{2},$$

$$r' = \sqrt{ra'}.$$

Stały obwód, o którym mowa w zagadnieniu, niech się równa liczbie 2.

Wyobraźmy sobie, że szukamy promienia x koła, którego obwód równa się 2. Będziemy mieli $x = \frac{1}{\pi}$. Zauważmy dalej, że obwód c tego koła jest większy od obwodu koła, wpisanego w wielokąt foremny, mający obwód = 2, mniejszy zaś od obwodu koła, opisanego na tym samym wielokącie; zatem promień x musi się zawierać między apotemą a i promieniem r tego wielokąta, przyczem podwajając wciąż liczbę boków wielokąta (a pozostawiając bez zmiany jego obwód), zamykamy x w coraz ciaśniejsze granice.

W ten sposób tworzymy dwa nieskończone ciągi liczb, między którymi zawiera się liczba $\frac{1}{\pi}$.

n	apotema	promień
4	0,25	0,353 ...
8	0,301....	0 326....
16	0,3142....	0,3203....
32	0,3172....	0,3188....
64	0,31805....	0,31843....
128	0,318245....	0,31834....

§ 302. Chcąc ustalić pojęcia długości łuku i pola wycinka kołowego, możemy z tymi figurami postąpić tak, jak z kołem. Możemy mianowicie określić długość łuku jako wspólną granicę, do której dążą długości łamanych wpisanych w ten łuk i opisanych na nim.

Tak samo określamy pole wycinka kołowego jako wspólną granicę pól wielokątów, wpisanych w wycinek i opisanych na nim, przytym mających wierzchołki w środku koła i dwa promienie koła jako boki.

Ćwiczenia XLVIII. 1. Obliczyć promień koła, jeżeli wiadomo, że kątowi środkowemu, mającemu $25^\circ 10'$, odpowiada łuk, mający 4 m. długości.

2. Mamy dane dwa koła, których promienie mają się do siebie jak 1:100. Promienie obu kół zwiększamy o 1 cm.; w którym kole obwód bardziej się zwiększył? w którym pole bardziej się zwiększyło?

3. Pola dwóch kół mają się do siebie tak, jak 1:8; jaki jest stosunek ich promieni?

4. Kąty trójkąta mają się tak do siebie jak 1:2:3; promień koła opisanego równa się 12 cm.; obliczyć długości łuków podpartych przez boki trójkąta.

5. W koło o promieniu 6 cm. wpisano czworobok, którego kąty kolejne mają się do siebie, jak 1:2:3:9. Obliczyć długości czterech łuków, na które został podzielony okrag.

6. W wycinek kołowy wpisać koło; obliczyć jego pole, jeżeli kąt wycinka równa się (1) 60° , (2) 90° .

7. Pole każdego trójkąta ma się tak do jego obwodu, jak pole koła wpisanego ma się do długości okręgu tego koła.

8. Na bokach kwadratu, jako na średnicach, kreślimy półkola do wnętrza; przecięcie ich wyznacza figurę, złożoną z czterech soczewek. Obliczyć pole tej figury, jeżeli bok kwadratu = a .

9. Z wierzchołków trójkąta foremnego $\triangle ABC$ kreślimy trzy koła promieniem a ; obliczyć pole trójkąta krzywolinowego ABC .

10. Mając dane półkole, obieramy dowolny punkt C na jego średnicy AB i kreślimy dwa nowe półkole, leżące wewnątrz pierwszego i mające za średnice odcinki AC , CB . Obliczyć pole t. zw. sierpa Archimedesza, t. j. trójkąta krzywolinowego, zawartego między tymi trzema półkolami. Zbudować koło, którego pole równałoby się polu sierpa.

11. Na średnicy AB danego półkola obieramy punkty C , D tak, żeby było $AC = BD$, poczym na AC i BD , jako na średnicach, kreślimy półkola, leżące wewnątrz danego, na średnicy zaś CD kreślimy półkole, leżące po przeciwnej stronie prostej AB . W ten sposób otrzymujemy t. zw. tarczę Archimedesza. Obliczyć jej pole i zbudować koło, mające to samo pole.

12. Mamy dany ćwierćian (t. j. wycinek, stanowiący czwartą część koła) AOB . Na promieniach jego AO , OB , jako na średnicach, kreślimy półkola, przecinające się w punkcie M . Dowieść, że M leży na prostej AB i obliczyć pola czterech części, na które podzieliliśmy ćwierćian.

13. Z każdego wierzchołka sześciokąta foremnego kreślimy koło, przechodzące przez środki dwóch sąsiednich boków. Znaleźć pole sześciokąta krzywolinowego, który powstał wewnątrz danego sześciokąta.

14. Niech będą OA , OB dwa prostopadłe do siebie promienie koła. Na łuku AB obieramy punkty C , D tak, żeby łuki AC , BD równały się sobie. Z punktów C i D prowadzimy prostopadłe CE , DF do OA . Nie posługując się rachunkiem, dowieść, że trapez krzywoliniowy $EFDC$ i wycinek kołowy OCD mają pola równe.

15. Dane jest koło i punkt M na okręgu. Wykreślić takie trzy koła, styczne wewnętrznie w punkcie M do danego koła, by podzieliły one pole koła danego na cztery części równe.

16. Znaleźć wzór na pole wycinka kołowego, którego kąt ma α stopni.

17. Dowieść, że zarówno pola wycinków podobnych, jak i pola podobnych odcinków kołowych mają się do siebie tak, jak kwadraty cięciw.

18. Pola podobnych odcinków kołowych mają się do siebie tak, jak kwadraty cięciw.

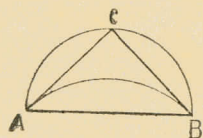
19. W kole $(O)A$ na promieniu AO , jako na średnicy, kreślimy drugie koło. Jeżeli poprowadzimy dowolną prostą AB , wówczas dwa odcinki kołowe, wyznaczone przez tę prostą w dwóch naszych kołach, będą się miały do siebie, jak 4:1.

20. Mając dany odcinek kołowy, zbudować dwa podobne do niego odcinki, z których jeden byłby n^2 razy mniejszy od niego, drugi zaś n^2 razy większy.

21. Pole koła, którego średnicą jest przeciwprostokątna, równa się sumie pól dwóch kół, których średnicami są dwie przyprostokątne.

22. Uogólnić poprzednie twierdzenie, posługując się odcinkami kołowymi.

Nad zagadnieniem pomiaru koła pracowano w starożytnej Grecji na wiele lat przed Archimedesem. Wszystkie próby rozwiązania tego zagadnienia były bezowocne, natrafiono jednak przy tej sposobności na rozmaite ciekawe własności figur geometrycznych. Do naszych czasów dochowało się sprawozdanie z odkryć, które uczynił Hippokrates z Chiosu (około 440 r. przed Chr.) przy poszukiwaniu wielokąta równoważnego kołu. Nie udało mu się wprawdzie zmierzyć pola koła, ale zdołał dowieść, że istnieją figury, ograniczone łukami kół, których pola równają się polom pewnych wielokątów. Figurami tymi są t. zw. księżycy Hippokratesa, o których mowa w zadaniach 24–26.



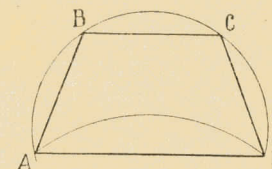
Rys. 262.

24. Mając dany trójkąt prostokątny równoramienny, opisujemy na nim koło, poczym na przeciwprostokątnej kreślimy odcinek kołowy, podobny do tych odcinków, które powstały na

*) Podobnymi wycinkami lub odcinkami nazywamy te, którym odpowiadają równe kąty środkowe.

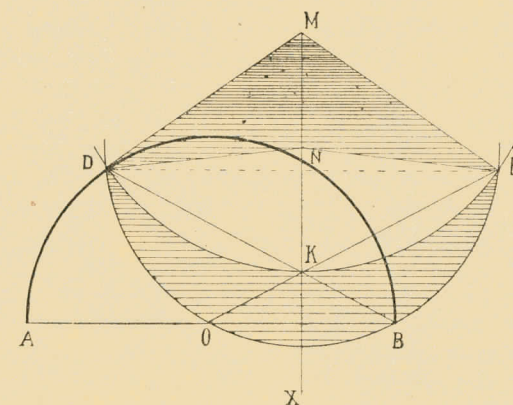
przyprostokątnych.*) Otrzymujemy w ten sposób księżyc, którego pole równa się polu trójkąta $\triangle ABC$.

25. Mając dany odcinek a , budujemy trapez równoramienny tak, by dwa jego boki i mniejsza podstawa równały się a , większa zaś podstawa żeby była równa $a\sqrt{3}$. Na trapezie opisujemy koło, poczym na większej podstawie wykreślamy odcinek kołowy, podobny do tych odcinków, które powstały na pozostałych bokach trapezu. Księżyc $ABCD$ ma pole, równające się polu trapezu.



Rys. 263.

26. Niech będzie dane półkoło $(O)A$. W środku promienia OB wystawiamy prostopadłą KX i przez punkt B prowadzimy sieczną tak, by odcinek jej DK , zawarty między ową prostopadłą a okręgiem, równał się $r\sqrt{\frac{3}{2}}$.**) Jeżeli teraz z D wykreślimy równoległą



Rys. 264.

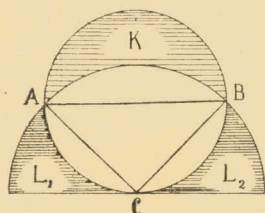
do OB , która przecina prostą OK w punkcie E , wówczas punkty D , O , B , E leżeć będą na jednym łuku koła, punkty zaś D , K , E na drugim łuku. Jeżeli M , N są środkami kół, odpowiadających tym dwóm łukom, wówczas pole księżycy, zawartego między tymi dwoma łukami, równa się polu czworoboku $DMEN$.

Prócz księżyców Hippokratesa możemy utworzyć inne jeszcze figury, ograniczone łukami kół i równoważne pewnym trójkątom lub wielokątom.

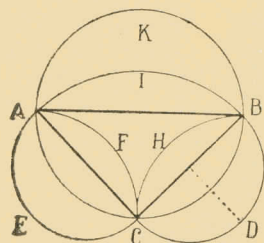
*) W jaki sposób można zbudować odcinek kołowy, podobny do innego danego odcinka?

**) Konstrukcję takiej prostej rozważaliśmy w zadaniu IV, str. 282.

27. Na dowolnym trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$ opisujemy koło, poczym nazewnątrz trójkąta kreślimy dwa półkola, mające jego przyprostokątne za średnice. Otrzymujemy dwa księżyce; suma ich pól równa się polu trójkąta $\triangle ABC$.



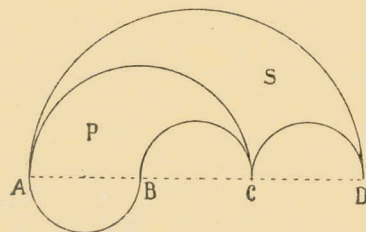
Rys. 265.



Rys. 266.

30. Na przeciwprostokątnej dowolnego trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$ kreślimy nazewnątrz ćwierć okręgu, na przyprostokątnych zaś kreślimy również po ćwierci okręgu, ale po stronie wewnętrznej trójkąta. Dowieść, iż pole trójkąta krzywoliniowego, zawartego między tymi trzema łukami, równa się polu trójkąta $\triangle ABC$.

31. Czy poprzednie twierdzenie pozostanie prawdziwe, jeżeli na każdym boku wykreślimy po $1/n$ -tej części okręgu, gdzie $n \neq 4$?



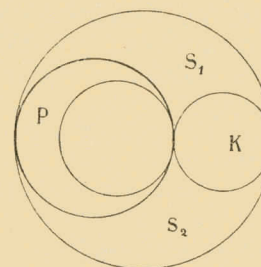
Rys. 267.

32. Jeżeli na rys. 267 mamy $AB = CD$, wówczas pola figur P i S są sobie równe.

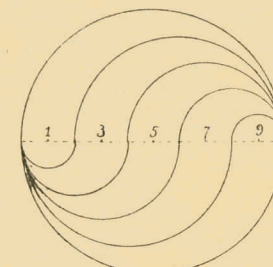
33. Sama figur S_1, S_2 na rys. 268 różni się od księżycy P o pole koła K .

34. Na sześciokącie foremnym opisujemy koło, a prócz tego na każdym boku sześciokąta kreślimy nazewnątrz po półkole, tak iż

otrzymujemy sześć księżyców. Wykreślić drugie koło, współśrodkowe z pierwszym, tak, żeby pole figury, zawartej między nim a sześciokątem, równało się sumie pól księżyców.



Rys. 268.



Rys. 269.

35. Uzasadnić wskazany na rys. 269 podział koła na n części, mających równe pola.

Do najsłynniejszych zagadnień matematycznych należą t. zw. zagadnienia kwadratury koła i wyprostowania (rektyfikacji) okręgu. Sformułować je możemy w sposób następujący posługując się wyłącznie cyrklem i linjałem, zbudować kwadrat, którego pole równałoby się polu danego koła, lub też odcinek, którego długość równałaby się długości danego okręgu.

Zagadnienia te niepokoiły umysły ludzkie od chwili, gdy geometria zaczęła stawać się nauką. Dziś wiemy, że oba te zagadnienia są niemożliwe do rozwiązania: dałyby się wprowadzić wymyśleć specjalne przyrządy do kwadratury i rektyfikacji, ale niepodobna zbudować odpowiedniego kwadratu czy odcinka, jeżeli mamy posługiwać się tylko cyrklem i linjałem.

To samo jednak zagadnienie możemy z łatwością rozwiązać w sposób przybliżony, co stanowi treść następujących zadań.

36. Najstarsze znane nam dzieło matematyczne (podręcznik, ułożony pomiędzy 2000 i 1700 r. przed Chr. przez kapłana egipskiego Ahmésa) zawiera następujący przepis na obliczanie pola koła o średnicy = 9:

„odejmij $\frac{1}{9}$ część czyli 1; pozostaje 8; pomnóż tę liczbę przez 8; otrzymasz 64, pole równa się 64”.

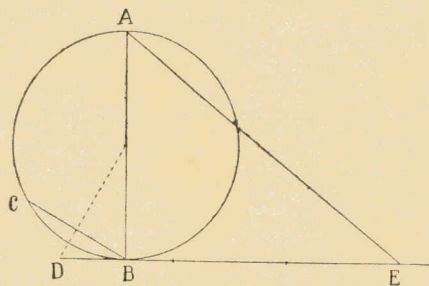
Jakiej wartości na π odpowiada ten przepis?

37. Jaką wartość przypiszemy liczbie π , jeżeli za długość okręgu uważać będziemy sumę $a_3 + a_4$?

38. Hindusi posiadali następujący przepis budowania koła o polu, równającym się w przybliżeniu polu danego kwadratu: „od połowy przekątnej kwadratu odejmij połowę boku, różnicę podziel na trzy części równe i ze środka kwadratu zakresł koło, przechodzące przez pierwszy punkt podziału”. Jakiej wartości na π odpowiada ten przepis?

39. Na ile części równych wypadłoby dzielić różnicę między przekątną a bokiem kwadratu w zadaniu poprzednim, jeżeli chcemy, by konstrukcja odpowiadała wartości π , obliczonej z dokładnością do 0,001?

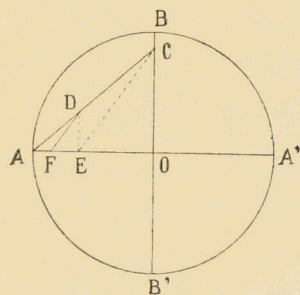
40. Ciekawą konstrukcję okręgu wyprostowanego podał w 1685 r. jezuita Adam Kochański, sekretarz króla Jana III. Oznacza się ona znacznym stopniem przybliżenia i daje się wykonać jednym rozwarciem cyrkla.



Rys. 270.

Kreślimy średnicę AB , przez B prowadzimy styczną, kreślimy cięciwę $BC=r$, prowadzimy OD prostopadłe do tej cięciwy, od D odkładamy odcinek $DE=3r$; odcinek AE jest niewiele mniejszy od połowy okręgu. Znaleźć stopień przybliżenia tej konstrukcji.

41. Kreślimy dwie prostopadłe do siebie średnice AA' , BB' i kładąc $OB=1$, kreślimy $OC=\frac{1}{2}$, $AD=\frac{1}{2}$, $DE\parallel OB$; $DF\parallel EC$; jeżeli teraz odłożymy na prostej odcinek równy trzem promieniom i dodamy do niego odcinek AF , otrzymamy nowy odcinek, mało różniący się od długości połowy okręgu. Obliczyć w postaci ułamka zwyczajnego wartość na π , odpowiadającą powyższej konstrukcji. Wartość tę znalazł w XVI w. Adriaen Antonisz*); zresztą już około 430 r. po Chr. znał ją astronom chiński Tsu-ching-czi.



Rys. 271.

KSIEGA V.

O położeniu wzajemnym prostych i płaszczyzn.

ROZDZIAŁ I.

O prostych i płaszczyznach równoległych.

§ 303. Przedewszystkim musimy przypomnieć następujące pewniki, na których opierać się będziemy w dalszym wykładzie.

Pewnik Ib. *Prosta i punkt, nie leżący na niej, wyznaczają płaszczyznę.*

Wykazaliśmy już (str. 9), że temu samemu pewnikowi można nadać dwie inne formy:

(1) *trzy punkty, nie leżące na jednej prostej, wyznaczają płaszczyznę;*

(2) *dwie przecinające się proste wyznaczają płaszczyznę.*

Teraz możemy mu nadać jeszcze trzecią formę, mianowicie:

(3) *dwie proste równoległe wyznaczają płaszczyznę.*

Istotnie, równoległe określiliśmy (§ 72) jako pewne proste leżące w jednej płaszczyźnie, jeśli więc mamy dane dwie proste równoległe a , b , to przez to samo dana jest płaszczyzna, w której one leżą. Z drugiej strony, niema żadnej innej płaszczyzny, w której mogłyby leżeć proste a , b , gdyż jedna z tych prostych, np. a i którykolwiek punkt M na drugiej prostej wyznaczają płaszczyznę.

*) Zazwyczaj przypisują to odkrycie jego synowi, zwanemu Metiusem, ten jednak powiada wyraźnie, że ogłasza jedynie odkrycie swego ojca.

Uwaga. Jeżeli powiemy, iż równoległe mają spólny punkt niewłaściwy, to forma (3) pewnika nie różni się zasadniczo od formy (2).

Pewnik Ic. Prosta, łącząca dwa dowolne punkty płaszczyzny, leży na tej płaszczyźnie czyli ma z nią wszystkie punkty wspólne.

Pewnik Id. Dwie płaszczyzny, mające punkt spólny, przecinają się według linii prostej, zwanej krawędzią tych płaszczyzn.

§ 304. Na tych pewnikach możemy oprzeć następujące symbole, którymi wypadnie posługiwać się:

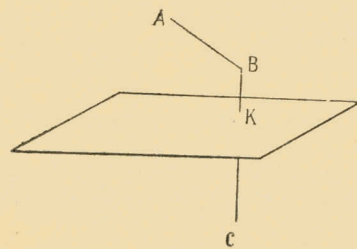
$[a, M]$ oznaczać będzie płaszczyznę, wyznaczoną przez prostą a i punkt M ;

$[A, B, C]$ oznaczać będzie płaszczyznę, wyznaczoną przez punkty A, B i C ;

$[a, b]$ oznaczać będzie płaszczyznę, wyznaczoną przez proste a i b ;

$[\alpha, \beta]$ oznaczać będzie krawędź dwóch płaszczyzn α i β .

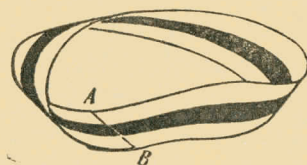
§ 305. Pewnik Iic. Płaszczyzna dzieli przestrzeń na dwie części (na dwa obszary), z których każda zawiera dowolną ilość punktów.



Rys. 272.

Znaczy to, że jeśli punkty A, B należą oba do tego samego obszaru, wówczas odcinek AB nie ma punktów spólnych z płaszczyzną α , jeżeli natomiast punkty B i C leżą w dwu różnych obszarach, to odcinek BC przebija płaszczyznę α w jakimś punkcie K .*)

*) Popularnie możnaby tę samą prawdę tak wyrazić: płaszczyzna ma w naszym pojęciu dwie strony; z jednej strony na drugą nie można dostać się inaczej, jak tylko przebijając płaszczyznę.



Rys. 273.

Zdawałoby się, że ta zdolność posiadania dwóch stron przysługiwać powinna każdej powierzchni; łatwo jednak zbudować model t. zw. powierzchni je-

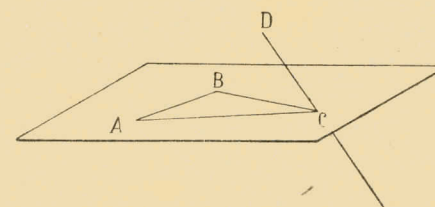
Punkt K nazywamy *punktem przecięcia płaszczyzny α przez prostą BC* . Niekiedy mówimy o *przecinaniu się płaszczyzny z prostą*, zamiast o *przebijaniu*.

§ 306. Dwie proste mogą leżeć w przestrzeni względem siebie w trojaki sposób: albo przecinają się, albo są do siebie równoległe, albo wreszcie nie mają żadnej spólnej płaszczyzny.

W tym trzecim przypadku powiedzielibyśmy popularnie, że dwie takie proste rozciągają się w przestrzeni (lub krzyżują).

Określenie. Prostymi skośnymi nazywamy dwie proste, które nie mogą leżeć we wspólnej płaszczyźnie.

Aby wykazać istnienie takich prostych, wystarczy obrać dowolną płaszczyznę $[ABC]$ oraz punkt D , nie leżący w tej płaszczyźnie. Powiadam, że proste DC i AB są skośne.



Rys. 274.

Istotnie, gdyby leżały one w jednej płaszczyźnie, wówczas w tej płaszczyźnie musiałyby leżeć cztery punkty A, B, C, D , co przeczy naszemu założeniu.

Ćwiczenia XLIX. 1. Na ścianach pokoju, na meblach i t. d. wskazać pary prostych równoległych, przecinających się lub skośnych. Wskazać płaszczyzny, wyznaczone przez te proste.

2. Wskazać w pokoju prostą, przebijającą płaszczyznę.

Znaleść również przykłady, ilustrujące pewnik Iic.

3. Wskazać w pokoju dwie przecinające się płaszczyzny, krawędź ich oraz wszystkie obszary, na które podzieliły one przestrzeń.

4. Mamy dane cztery punkty A, B, C, D nie leżące w jednej płaszczyźnie. Jak nazywa się krawędź płaszczyzn $[ABC], [ACD]$? krawędź płaszczyzn $[BCD], [DAB]$? Wyliczyć wszystkie płaszczyzny, wyznaczone przez te cztery punkty.

5. Dane są dwie proste a, b , przecinające się w punkcie K , i punkt M , nie leżący w płaszczyźnie $[ab]$. Nazwać wszystkie płaszczyzny, które przechodzą przez K i M .

W tym celu pasek papieru skręcamy raz jeden (lub wogóle nieparzystą liczbę razy), poczym sklejamy jego końce (rys. 273). Uczeń przekona się, że cały pasek można teraz jednym pociągnięciem pendzla pomalować z obu stron czyli można go obejść z obu stron, nie przebijając go nigdzie.

czyzny, wyznaczone na naszej figurze. Nazwać krawędzie każdej pary płaszczyzn na naszej figurze.

Zrobić model tekturowy, na którym byłyby uwidocznione wszystkie płaszczyzny tej figury.

6. Wykazać, że na rys. 274 można znaleźć nie jedną, lecz trzy pary prostych skośnych.

7. Obieramy cztery punkty A, B, C, D w jednej płaszczyźnie i punkt E poza tą płaszczyzną. Ile mamy na naszej figurze prostych, skośnych względem AE ?

8. Ile wogóle par prostych skośnych możnaby odszukać na tej figurze?

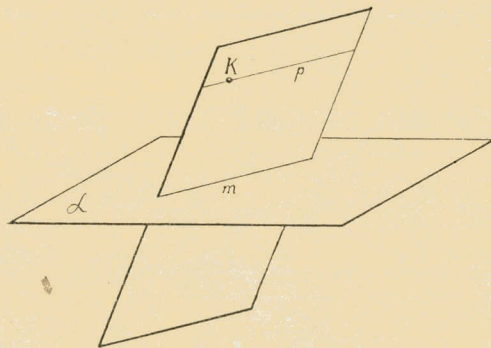
9. Jeżeli trzy proste przecinają się parami w trzech punktach, wówczas muszą wszystkie trzy leżeć w jednej płaszczyźnie. Czy można to samo powiedzieć o trzech prostych do siebie równoległych?

10. Czy poprzednie twierdzenie da się zastosować do czterech prostych przecinających się parami? Ile punktów przecięcia mielibyśmy wtedy?

§ 307. Mówiąc o teorii prostych i płaszczyzn równoległych, musimy przedewszystkim zaznaczyć, że pewnik IV i wszystkie wnioski z niego płynące pozostają prawdziwe i w stereometrii. W szczególności pozostaje prawdą, że przez dany punkt A możemy do danej prostej m poprowadzić tylko jedną równoległą (§ 75, str. 55), gdyż punkt ten i prosta wyznaczają płaszczyznę $[mA]$, w której, jak wiemy, istnieje tylko jedna równoległa do prostej m , przechodząca przez punkt A .

§ 308. Określenie. O prostej i płaszczyźnie powiadamy, że są do siebie równoległe, jeżeli nie mają ani jednego punktu wspólnego.

Jak zwykle przy wprowadzaniu nowego pojęcia, musimy wykazać, że istnieją naprawdę proste i płaszczyzny równoległe



Rys. 275.

do siebie. W tym celu pokażemy sposób budowania takich figur.

Niech będzie dana płaszczyzna α , a na niej prosta m . Przez dowolny punkt K , nie należący do płaszczyzny α , prowadzimy płaszczyznę $[Km]$, a w niej kreślimy

przez punkt K prostą p , równoległą do m . Powiadam, że prosta p odpowiada naszemu określeniu i jest równoległa do płaszczyzny α .

Istotnie, gdyby p i α miały punkt wspólny, punkt ten musiałby leżeć na prostej m , czyli p i m przecinałyby się, co jest niedorzeczne.

Uwaga. Rzecz prosta, że w powyższym określeniu i w konstrukcji mowa jest tylko o punktach właściwych. Natomiast prosta p ma z równoległą do niej prostą m wspólny punkt niewłaściwy, a więc p i α mają wspólny punkt niewłaściwy.

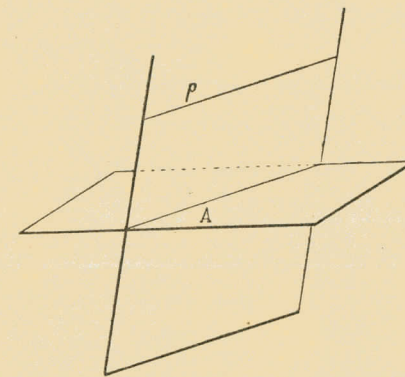
§ 309. Twierdzenie. Jeżeli proste m, p są do siebie równoległe, wówczas prosta p jest równoległa do każdej płaszczyzny, przesuniętej przez m (o ile pominiemy płaszczyznę $[mp]$, w której leżą obie te równoległe).*)

Istotnie, gdyby prosta p przebijała w jakimś punkcie X płaszczyznę α , przesuniętą przez prostą m , w takim razie ten punkt przebicia X musiałby leżeć na prostej m , gdyż prosta p leży w całości na płaszczyźnie $[mp]$, a krawędzią płaszczyzn α i $[mp]$ jest właśnie prosta m .

Założyliśmy, że proste m, p są do siebie równoległe, zatem wniosek nasz jest niedorzeczny.

§ 310. Twierdzenie. Jeżeli prosta p jest równoległa do płaszczyzny α , wówczas w każdym punkcie tej płaszczyzny możemy wykreślić równoległą do prostej p .

Istotnie, jeżeli na płaszczyźnie α obraliśmy dowolny punkt A , wówczas płaszczyzna $[Ap]$ przecina płaszczyznę α według krawędzi, która jest równoległa do p (dlaczego?)

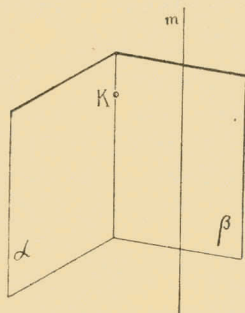


Rys. 276.

§ 311. Twierdzenie. Jeżeli prosta m jest równoległa do dwóch przecinających się płaszczyzn α i β to jest równoległa do ich krawędzi $[\alpha, \beta]$.

*) Możemy zresztą wyjątku tego nie robić i uważać, że prosta α , leżąca na płaszczyźnie α , jest do tej płaszczyzny równoległa.

Istotnie, jeżeli K jest dowolnym punktem na krawędzi, wówczas przez K możemy poprowadzić prostą, leżącą w płaszczyźnie α i równoległą do m , oraz prostą, leżącą w płaszczyźnie β i równoległą do m . Ale przez K przechodzi tylko jedna równoległa do m , zatem obie te równoległe zlewają się w jedną prostą i jest nią krawędź $[\alpha\beta]$, gdyż prosta ta leży jednocześnie w obu płaszczyznach α i β .



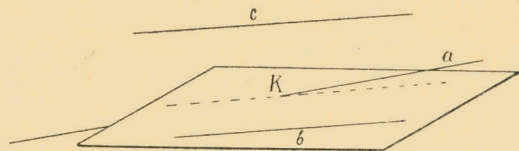
Rys. 277.

§ 312. Twierdzenie odwrotne (względem § 311). Jeżeli prosta m jest równoległa do krawędzi $[\alpha\beta]$ dwóch płaszczyzn, to jest równoległa do każdej z tych dwu płaszczyzn α i β . Wynika bezpośrednio z § 310.

§ 313. Twierdzenie. Dwie proste równoległe do trzeciej prostej są do siebie równoległe.

Niech będą dane proste a, b, c takie, że $a//c, b//c$; mamy dowieść, że $a//b$.

Zauważmy, że a i b nie mogą przecinać się, gdyż wtedy przez ich punkt przecięcia się przechodziłyby dwie proste, równoległe do tej samej prostej c .



Rys. 278.

Ale a i b nie mogą być również skośne, jeśli bowiem na a obierzemy dowolny punkt K , wówczas płaszczyzna $[Kb]$ musi być równoległa do prostej c [dlaczego?]. Gdyby więc prosta a nie leżała w płaszczyźnie $[Kb]$, to przez punkt K moglibyśmy poprowadzić dwie równoległe do prostej c (które mianowicie?)

Ćwiczenia L. 1. Dana jest płaszczyzna α i prosta m do niej równoległa. Przez m prowadzimy dowolną płaszczyznę β ; w jaki spo-

sób krawędź $[\alpha\beta]$ leży względem m ? Co dzieje się z tą krawędzią, gdy β obracamy dookoła m ?

2. Czy dwie płaszczyzny α, β , równoległe do tej samej prostej m , mogą nie być do siebie równoległe? Zilustrować na ścianach pokoju.

3. Dana jest płaszczyzna α i punkt K , nie leżący na niej; przez K poprowadzić prostą, równoległą do α .*) Ile rozwiązań?

4. Czy dwie proste a, b , równoległe do tej samej płaszczyzny γ , mogą się przecinać? Czy mogą być skośne? Wskazać odpowiednie przykłady w pokoju, obierając sufit jako płaszczyznę γ .

5. Jeżeli proste a i b są do siebie równoległe, a prócz tego b jest równoległa do płaszczyzny γ , to a jest równoległa do γ .

6. Sformułować i zbadać twierdzenie odwrotne do poprzedniego.

7. Jeżeli $a//b$ i jedna z tych prostych przebija płaszczyznę α , to i druga przebija tę płaszczyznę. [Wskazówka: uwzględnić płaszczyznę $[ab]$ i jej krawędź z płaszczyzną α].

8. Jeżeli punkty A, B, C, D nie leżą w jednej płaszczyźnie, wówczas tworzą t. zw. czworobok skośny. Dowieść, że środki boków tego czworoboku są wierzchołkami równoległoboku.

Sporządzić model figury z pręcików i drutów.

9. Przez punkt K poprowadzić płaszczyznę, równoległą do prostej a . Ile rozwiązań?

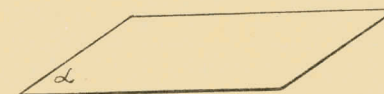
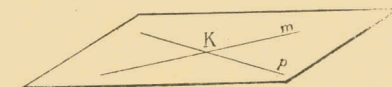
10. Przez prostą m poprowadzić płaszczyznę, równoległą do prostej a . Ile rozwiązań przy rozmaitych wzajemnych położeniach prostych a i m ?

§ 314. Określenie. Dwie płaszczyzny nazywamy równoległymi, jeżeli nie mają one wcale punktów wspólnych.

Łatwo znaleźć możemy sposób budowania takich płaszczyzn. Niech będzie dana płaszczyzna α i punkt K , zewnątrz niej leżący. Poprowadzimy

przez K dwie proste m, p , równoległe do płaszczyzny α (patrz zadanie 3, str. 317); powiadam, że płaszczyzna $[mp]$ jest równoległa do płaszczyzny α .

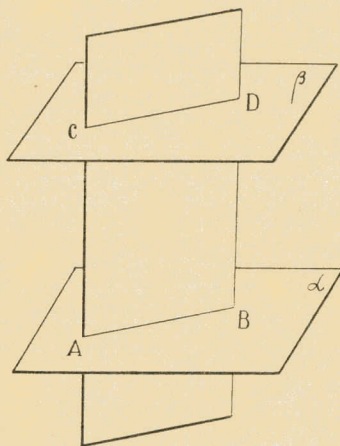
Istotnie, gdyby te dwie płaszczyzny przecinały się we-



Rys. 279.

*) W konstrukcjach stereometrycznych poszukujemy najpierw elementów, któreby wyznaczyły nam odpowiednią płaszczyznę, a w niej dokonywamy konstrukcji planimetrycznej. Np. w § 308 wyznaczyliśmy najpierw płaszczyznę $[Km]$, a w niej poprowadziliśmy równoległą do prostej m .

dług jakiejś prostej s , wówczas prosta s albo byłaby równoległa do obu prostych m , p — co jest niedorzeczne (dlaczego?), albo przecinałaby przynajmniej jedną z nich, np. prostą m . Ale i to przypuszczenie jest niedorzeczne, gdyż w takim razie prosta m przebiegałaby płaszczyznę α .



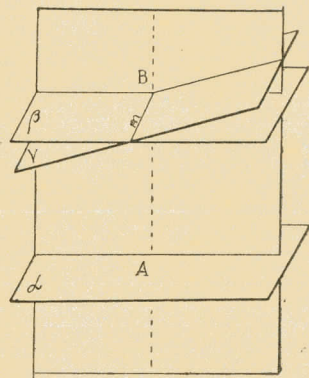
Rys. 280.

§ 315. Twierdzenie. Jeżeli dwie równoległe płaszczyzny przetniemy trzecią, otrzymamy dwie równoległe do siebie krawędzie.

Np. na rys. 280 krawędzie AB i CD są do siebie równoległe, gdyby bowiem przecinały się, to płaszczyzny α i β musiałyby również przeciąć się, co jest niedorzeczne,

(Dlaczego proste AB i CD nie mogą być skośne?)

§ 316. Twierdzenie. Przez daną prostą m , równoległą do płaszczyzny α można poprowadzić tylko jedną płaszczyznę, równoległą do α .



Rys. 281.

Istotnie, gdyby przez prostą m przechodziły dwie płaszczyzny β i γ , obie równoległe do α , wówczas wystarczyłoby obrać dowolny punkt B na krawędzi m oraz dowolny punkt A na płaszczyźnie α i przez prostą AB przesunąć jakąkolwiek czwartą płaszczyznę, która musiałaby, rzecz prosta, przeciąć wszystkie trzy płaszczyzny α β γ . W ten sposób otrzymalibyśmy dwie proste b , c , równoległe do prostej a i przechodzące przez punkt B , co jest niedorzeczne.

Wniosek 1. Przez dany punkt A możemy poprowadzić tylko jedną płaszczyznę, równoległą do płaszczyzny α gdyż naj-

pierw prowadzimy przez A prostą m , równoległą do α przez co sprowadziliśmy zagadnienie do formy znanej.

2. Wszystkie proste, równoległe do danej płaszczyzny α i przechodzące przez jeden punkt A , tworzą płaszczyznę, równoległą do α .

Ćwiczenia LI. 1. Płaszczyzna, która przecina jedną z dwu równoległych płaszczyzn, przecina i drugą. [Wskazówka: Sprowadzić do niedorzeczności; § 316].

2. Prosta, która przebiega jedną z dwu równoległych płaszczyzn, przebiega i drugą. [Ten sam § 316 oraz wniosek 2].

3. Dwie płaszczyzny równoległe do trzeciej są równoległe do siebie. [Ten sam § 316].

4. Mając dane dwie proste skośne, przesunąć przez jedną z nich płaszczyznę, równoległą do drugiej.

5. Dane są proste skośne a , b oraz punkt M , nie leżący na żadnej z nich. Przez M poprowadzić prostą, którąby przecięła zarówno a , jak b . [Wskazówka: prowadzimy płaszczyznę $[Ma]$, którą w punkcie K przebiega prosta b].

6. Dane są dwie proste skośne a , b ; poprowadzić prostą, którąby przecięła je obie i była równoległa do danej prostej m . [Wskazówka: przez a płaszczyznę, równoległą do m].

7. Rozwiązać zadanie 6 w założeniu, że sieczna ma być równoległa nie do prostej m , lecz do danej płaszczyzny γ .

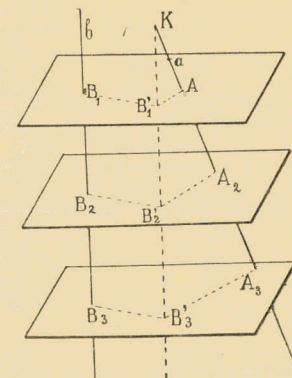
8. Mamy daną prostą nieruchomą a i prostą ruchomą g . Obie te proste stale przecinają się. Jak należy poruszać prostą g , by zakreśliła ona płaszczyznę?

9. Jeżeli proste a , b równoległe do siebie, przetniemy szeregiem płaszczyzn równoległych, otrzymamy odcinki proporcjonalne.

10. Czy twierdzenie 9-te pozostaje prawdziwe, jeżeli proste a , b przecinają się?

11. Czy twierdzenie 9-te pozostaje prawdziwe, jeżeli a , b są to dwie proste skośne? [Wskazówka: przez dowolny punkt K za prostej a prowadzimy równoległą do b — rys. 282].

12. Jeżeli czworobok skośny $ABCD$ przetniemy płaszczyzną, równoległą do obu jego przekątnych, wówczas płaszczyzna podzieli jego boki na odcinki proporcjonalne.



Rys. 282.

ROZDZIAŁ II.

O prostych i płaszczyznach prostopadłych.

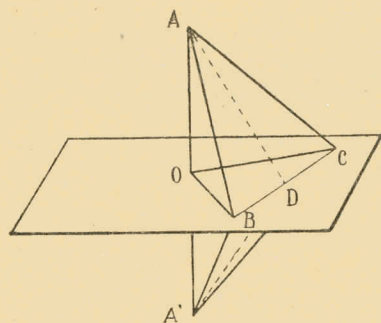
§ 317. Jeżeli mamy dany odcinek AA' , wówczas oś symetrii odcinka jest, jak wiadomo, miejscem punktów na płaszczyźnie, równoodległych od końców A, A' odcinka. Nasuwa się pytanie, jakie jest analogiczne miejsce geometryczne punktów w przestrzeni?

Obracajmy dokoła AA' figurę, utworzoną przez ten odcinek i przez jego oś symetrii OB . Mamy wrażenie, że oś OB kreśli płaszczyznę; innymi słowami: że wszystkie proste, prostopadłe do AA' w punkcie O , tworzą jedną płaszczyznę.

To nasuwa nam myśl o możliwości następującego określenia i twierdzenia.

§ 318. Określenie. Prosta a nazywamy prostopadłą do płaszczyzny α , jeżeli jest prostopadła do każdej prostej, leżącej w płaszczyźnie α i przechodzącej przez jej punkt przecięcia.

§ 319. Twierdzenie. W przestrzeni miejscem geometrycznym punktów, jednakowo odległych od końców odcinka, jest płaszczyzna, prostopadła do odcinka w jego środku i zwana płaszczyzną symetrii odcinka.



Rys. 283.

Jak zwykle, gdzie chodzi o miejsce geometryczne, musimy dowieść dwóch twierdzeń: prostego i przeciwnego.

1-o. Wyobraźmy sobie, iż przez AA' poprowadziliśmy dwie płaszczyzny $[ABA']$ i $[ACA']$ i że OB, OC są osiami symetrii odcinka AA' , wykreślonymi w tych dwóch płaszczyznach.

Osie OB, OC wyznaczają płaszczyznę α . Dowiedzimy najpierw, że każdy punkt tej płaszczyzny jest jednakowo odległy od A i A' i że każda prosta OD , leżąca w płaszczyźnie α , jest prostopadła do AA' .

W tym celu obieramy punkty B i C dowolnie na osiach symetrii i zauważamy, że

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'BC \quad (\text{dlaczego?}),$$

$$\text{zatem} \quad \sphericalangle ABC = \sphericalangle A'BC.$$

Jeśli teraz na BC obierzemy dowolny punkt D , musi być

$$\triangle ABD \equiv \triangle A'BD \quad (\text{dlaczego?}),$$

$$\text{zatem} \quad AD = A'D.$$

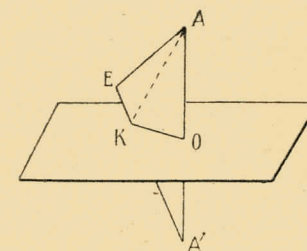
Ponieważ trójkąt $\triangle AA'D$, w którym $AO = OA'$, jest równoramienny, zatem $OD \perp AA'$.

2-o. Niech będzie dany punkt E , nie leżący w płaszczyźnie α , a mianowicie położony z tej samej strony płaszczyzny, co i punkt A . Dowiedzimy, iż odległość jego od A jest mniejsza, niż od A' .

Jakoż połączmy E z A i z A' i niech prosta EA' przebija płaszczyznę α w punkcie K .

W płaszczyźnie $[AEA']$ mamy dany odcinek AA' , jego oś symetrii OK i punkt E , leżący po tej samej stronie osi symetrii, po której znajduje się koniec A odcinka. Wobec tego (§ 101, str. 76) musi być

$$AE < EA'.$$



Rys. 284.

§ 320. Wnioski. 1. Wszystkie proste, prostopadłe do prostej AA' w punkcie O , leżą w jednej płaszczyźnie α , która jest prostopadła do AA' , a zatem

2. Przez punkt dany na prostej możemy poprowadzić tylko jedną płaszczyznę, prostopadłą do tej prostej.

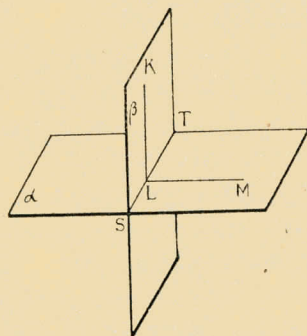
3. W dowodzie powyższego twierdzenia płaszczyzna α była wyznaczona przez dwie osie symetrii OB, OC odcinka AA' , zatem

jeżeli prosta jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych, to jest prostopadła do całej płaszczyzny, wyznaczonej przez te dwie proste.

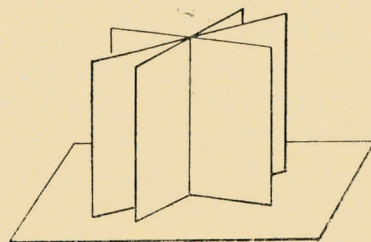
§ 321. Określenie. Wszystkie płaszczyzny, jakie dają się przesunąć przez jedną prostą, tworzą pęk płaszczyzn.

Prosta ta nazywa się krawędzią pęku.

§ 322. Określenie. Jeżeli do płaszczyzny α wystawimy prostopadłą i przez nią przesuniemy jakąkolwiek płaszczyznę β , wówczas powiadać, że dwie te płaszczyzny są do siebie prostopadłe.



Rys. 285.



Rys. 286.

Wnioski: 1. Jeżeli krawędź pęku jest prostopadła do płaszczyzny α , wówczas wszystkie płaszczyzny pęku są prostopadłe do α , i odwrotnie.

2. Jeżeli dwie płaszczyzny α , β są do siebie prostopadłe, wówczas każda prosta, poprowadzona w jednej z nich prostopadłe do ich krawędzi, jest prostopadła do drugiej płaszczyzny.

Np. na rys. 285 $KL \perp ST$ oraz $LM \perp ST$, a więc prosta KL jest prostopadła do α , prosta zaś LM jest prostopadła do β .

Ćwiczenia LII. 1. Przez punkt A , nie leżący na prostej m , można poprowadzić tylko jedną płaszczyznę prostopadłą do m . [Wskazówka: gdyby płaszczyzn prostopadłych miało być dwie α i β , wówczas przecinamy je płaszczyzną $[Am]$ i badamy figurę płaską, utworzoną przez ten przekrój].

2. Przez punkt A , leżący na płaszczyźnie α , można poprowadzić do α tylko jedną prostą prostopadłą. [Wskazówka: gdybyśmy mieli dwie prostopadłe AB i AC , wówczas badamy przekrój, wyznaczony przez płaszczyznę $[ABC]$].

3. Przez punkt A , nie leżący na płaszczyźnie α , możemy poprowadzić tylko jedną prostą, prostopadłą do α . [Wskazówka: ta sama metoda, co w zadaniu 1 i 2].

4. Przez punkt A , leżący na prostej m , poprowadzić płaszczyznę prostopadłą.

5. Przez punkt A , nie leżący na m , poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do prostej m .

6. Przez punkt A , należący do płaszczyzny α poprowadzić płaszczyznę, prostopadłą do α .

7. Przez punkt A , nie leżący w płaszczyźnie α poprowadzić płaszczyznę, prostopadłą do α .

8. Co można powiedzieć o wzajemnym położeniu prostych a , b , jeżeli proste te są

- (1) prostopadłe do tej samej prostej c ;
- (2) „ „ „ „ „ „ płaszczyzny α ?

9. Co można powiedzieć o wzajemnym położeniu dwóch płaszczyzn α , β , jeżeli płaszczyzny te są

- (1) prostopadłe do tej samej płaszczyzny γ ;
- (2) „ „ „ „ „ „ prostej m ?

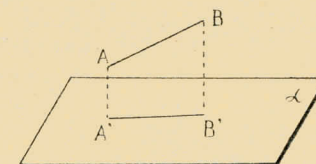
10. Co można powiedzieć o wzajemnym położeniu prostej m i płaszczyzny α , jeżeli oba te utwory są

- (1) równoległe od tej samej prostej a ;
- (2) prostopadłe „ „ „ „ „ „ „ „;
- (3) równoległe „ „ „ „ „ „ „ „ płaszczyzny β ;
- (4) prostopadłe „ „ „ „ „ „ „ „ „ „

11. Prosta m jest prostopadła do płaszczyzny α ; druga prosta p przecina prostą m i jest równoległa do α . Co kreśli prosta p , jeżeli poruszamy ją tak, iż pozostaje ona równoległa do α i stale przecina prostą p ?

Określenie. Jeżeli z końców odcinka AB poprowadzimy prostopadłe AA' , BB' do płaszczyzny α otrzymamy odcinek $A'B'$, który nazywa się **rzutem odcinka AB na płaszczyznę α** .

Płaszczyzna α nazywa się **płaszczyzną rzutów**.

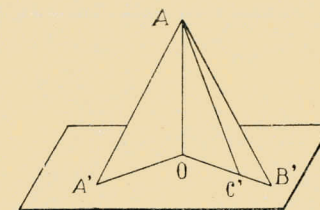


Rys. 287.

12. Jeżeli z punktu zewnętrznego A poprowadzimy do płaszczyzny α kilka odcinków, wówczas długości ich nie będą równe. Zbadać: 1) który z odcinków jest najkrótszy? 2) czy istnieje odcinek najdłuższy? 3) czy i kiedy istnieją odcinki równe? 4) który z dwóch pochyłych odcinków jest dłuższy?

Sformułować odpowiednie twierdzenia, zbadać, czy są odwracalne, i porównać z § 70 (str. 51).

13. Odcinek AB ma 39 cm., odległości jego końców od płaszczyzny rzutów równają się odpowiednio 8 cm. i 44 cm.; obliczyć długość jego rzutu na tę płaszczyznę.



Rys. 288.

14. W środku O rombu wystawiamy prostopadłą OK do jego płaszczyzny: obliczyć odległości punktu K od wierzchołków rombu, jeżeli $OK = h$, bok rombu $= a$, mniejsza jego przekątna $= e$.

15. Punkt K jest jednakowo odległy od wierzchołków trójkąta równoramiennego $\triangle ABC$, lecz nie leży w jego płaszczyźnie; obliczyć długość odcinka AK , jeżeli wiadomo, że odległość punktu K od płaszczyzny trójkąta równa się h .

16. Dany jest trójkąt równoramienny $\triangle ABC$ oraz punkt K , jednakowo odległy od jego boków, lecz nie leżący w jego płaszczyźnie. Znaleźć dwoma sposobami: 1) zapomocą rachunku, 2) zapomocą wykresu odległość punktu K od płaszczyzny trójkąta, jeżeli mamy dane, że odległość K od boku trójkąta $= b$.

17. Punkt, znajdujący się poza płaszczyzną kąta prostego, odległy jest od wierzchołka kąta prostego o a cm., od ramion jego o b cm. Znaleźć odległość tego punktu od płaszczyzny kąta prostego.

18. Dowieść, iż dwie równoległe płaszczyzny są równoodległe.

19. Jakie jest miejsce punktów przestrzeni, równoodległych trzech punktów A, B, C ?

20. Dane są dwie płaszczyzny i na jednej z nich punkty A, B, C ; znaleźć na drugiej płaszczyźnie punkt, równoodległy od A, B i C .

21. Dane są dwie skośne a, b ; znaleźć na prostej b punkt, jednakowo odległy od punktów A_1, A_2 prostej a .

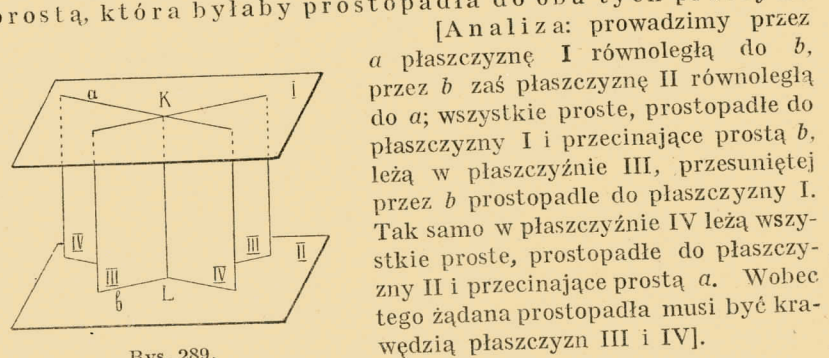
22. Dane jest koło $(O)r$ i punkt A , nie leżący w płaszczyźnie koła. Znaleźć najkrótszą i najdłuższą odległość A od okręgu koła.

23. Mamy dany pęk płaszczyzn o krawędzi a oraz punkt O , nie leżący na tej krawędzi. Z O prowadzimy do wszystkich płaszczyzn pęku proste prostopadłe; jakie jest miejsce geometryczne spodków prostopadłych?

24. Dane są dwie proste przecinające się a, b ; jakie jest miejsce geometryczne punktów przestrzeni, jednakowo odległych od obu prostych?

25. To samo zagadnienie, jeżeli $a \parallel b$.

26. Dane są dwie proste skośne a, b ; wykreślić prostą, która byłaby prostopadła do obu tych prostych.



Rys. 289.

27. Wykazać, że prostopadła, zbudowana w poprzednim zadaniu, jest zarazem najkrótszą odległością między dwiema prostymi skośnymi.

28. Uprościć konstrukcję zadania 20-go, odrzucając zupełnie płaszczyznę I i III.

ROZDZIAŁ III.

O kątach między prostymi i płaszczyznami.

§ 323. Twierdzenie. Dwa kąty płaskie o ramionach odpowiednio równoległych albo równają się sobie, albo spełniają się zależnie od tego, czy kąty mają ten sam zwrot czy zwroty przeciwne.

Wystarczy dowieść twierdzenia dla przypadku, gdy ramiona obu kątów mają zwroty zgodne, a więc i kąty mają ten sam zwrot.

W tym celu na ramionach kątów odłożmy równe sobie odcinki

$$OA = OB = O'A' = O'B'.$$

Czworobok $OO'A'A$ jest równoległobokiem (dla czego?),

tak iż $OO' = AA'$.

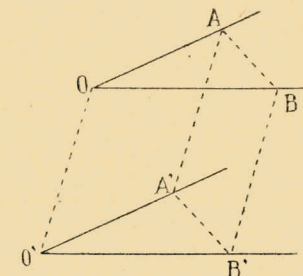
Tak samo $OO' = BB'$,

skąd wynika, że czworobok $AA'B'B$ jest równoległobokiem (dla czego?),

a więc $AB = A'B'$

i $\triangle OAB \equiv \triangle O'A'B'$.

Stąd wynika, że $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'O'B'$.



Rys. 290.

§ 324. Określenie. Kątem między dwiema prostymi nazywamy kąt, zawarty między dwiema równoległymi do tych prostych, poprowadzonymi z jednego punktu.

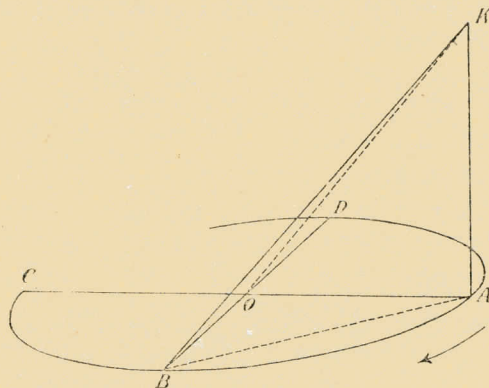
Możemy tedy mówić o kącie między dwiema skośnymi a, b ; wystarczy z dowolnego punktu M na prostej a poprowadzić równoległą do b : kąt między tą równoległą a prostą a nazywamy kątem między a i b .

§ 325. W szczególności będziemy nieraz mówili, że dwie proste są względem siebie *prostokątne*, jeżeli kąt między nimi, określony jak powyżej, jest prosty. Termin *prostopadłe* zachowany dla takich prostych, które nie tylko są prostokątne, ale prócz tego przecinają się.

Uczeń sam wykaże, że wniosek 3, § 320 da się ująć w sposób następujący:

Prosta jest prostopadła do płaszczyzny, jeżeli jest prostokątna względem dwóch przecinających się prostych na tej płaszczyźnie.

§ 326. Przypuśćmy, że z punktu zewnętrznego K poprowadzono do płaszczyzny α pochyłą KO i wykreślono rzut jej



Rys. 291.

(które?) są stałe, trzeci zaś rośnie, zatem przeciwległy mu kąt $\sphericalangle KOB$ wciąż rośnie.

Jak widzimy, wśród kątów, które prosta KO tworzy z prostymi płaszczyzny α , najmniejszy jest kąt $\sphericalangle KOA$ między prostą KO i jej rzutem.

To nasuwa nam pomysł następującego określenia:

Określenie. *Kątem nachylenia prostej do płaszczyzny (albo krócej: kątem między prostą i płaszczyzną) nazywamy kąt między tą prostą a rzutem jej na płaszczyznę.*

Jest to najmniejszy z kątów, jakie prosta nasza tworzy z prostymi, leżącymi w płaszczyźnie rzutów.

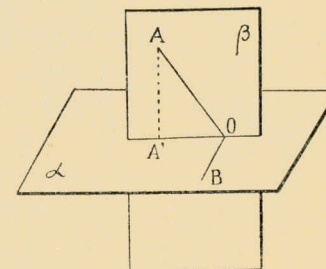
§ 327. **Twierdzenie.** *Kąt prosty rzutuje się na płaszczyznę jako kąt prosty, jeżeli jedno jego ramie jest do tej płaszczyzny równoległe.*

Ze względu na równość kątów o ramionach równoległych, wystarczy zbadać przypadek, gdy jedno ramie kąta prostego nie tylko jest równoległe do płaszczyzny rzutów, ale poprostu leży na niej.

Niech będzie dany kąt prosty $\sphericalangle AOB$, którego ramie OB leży na płaszczyźnie α ; mamy dowiedzieć, że rzut tego kąta czyli kąt $\sphericalangle A'OB$ jest również prosty.

W tym celu zauważmy, że proste AA' i OB są względem siebie prostokątne (dlaczego?).

Tak więc prosta OB jest prostokątna względem dwóch prostych AA' i AO , leżących w płaszczyźnie β , zatem jest prostopadła do tej płaszczyzny czyli jest również prostopadła do prostej OA' , leżącej w płaszczyźnie β .



Rys. 292.

§ 328. Twierdzenie powyższe ma dwa założenia (jakie?), możemy więc utworzyć dwa twierdzenia odwrotne. Jedno z nich pozostawiamy czytelnikowi do sformułowania i zbadania; drugie, jako ważniejsze, podajemy poniżej.

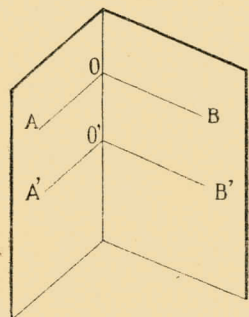
Twierdzenie odwrotne. (względem tw. § 327). *Jeżeli rzutujemy na płaszczyznę kąt, którego jedno ramie jest do tej płaszczyzny równoległe, i jeżeli w rzucie otrzymaliśmy kąt prosty, dowód to, że rzutowany kąt był prosty.*

Znów, jak w § 327, wystarczy zbadać przypadek, gdy jedno ramie kąta leży na płaszczyźnie rzutów α (rys. 292). Mamy tedy dane, że $\sphericalangle A'OB = \delta$ i że prosta AA' jest prostopadła do α ; trzeba dowiedzieć, że $\sphericalangle AOB = \delta$.

Tak jest istotnie, gdyż prosta OB jest prostokątna względem dwóch prostych OA' i AA' (dlaczego?), leżących w płaszczyźnie β , jest więc prostopadła do prostej OA , leżącej w tej samej płaszczyźnie.

§ 329. **Określenie.** *Dwuścianem albo klinem nazywamy figurę, utworzoną przez dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi.*

§ 330. Jeżeli na ścianach dwuścianu wykreślimy prostopadłe do jego krawędzi (np. proste OA , OB na rys. 293),



Rys. 293.

otrzymamy kąt płaski ($\sphericalangle AOB$), zwany *kątem linowym dwuścianu*.

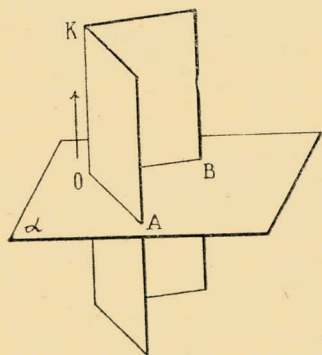
Gdybyśmy tę samą konstrukcję przeprowadzili w innym miejscu krawędzi, np. przy punkcie O' , otrzymalibyśmy kąt $\sphericalangle A'O'B'$, równający się kątowi $\sphericalangle AOB$ (dlaczego?).

Tak więc (1) *każdemu dwuścianowi odpowiada kąt linowy w zupełności wyznaczony*.

Odwrotnie: jeżeli obierzemy dowolny kąt płaski $\sphericalangle AOB$ (rys. 294), z wierzchołka jego O wystawimy prostą OK do płaszczyzny kąta i przesuniemy dwie płaszczyzny: jedną przez proste OK i OA , drugą przez OK i OB , otrzymamy dwuścian w zupełności wyznaczony.

Tak więc (2) *każdemu kątowi linowemu odpowiada dwuścian w zupełności wyznaczony*.

Jak widzimy, między dwuścianami (klinami) z jednej strony, a kątami linowymi z drugiej zachodzi doskonała odpowiedniość: *każdemu dwuścianowi odpowiada jeden i tylko jeden kąt linowy, i odwrotnie: każdemu kątowi linowemu odpowiada jeden i tylko jeden dwuścian*.



Rys. 294.

Wobec tego porównywanie dwuścianów (klinów) możemy zastąpić porównywaniem ich kątów linowych. W szczególności możemy ustalić szereg następujących określeń:

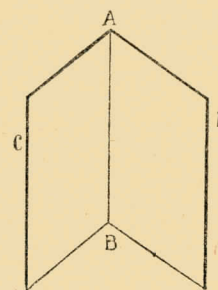
Określenia 1. Dwa dwuściany (kliny) nazywamy *równymi*, jeżeli *równają się sobie ich kąty linowe*.

2. Z dwóch dwuścianów uważamy za *większy ten*, którego kąt linowy jest większy.

3. Dwuściany uważamy za *proporcjonalne*, jeżeli ich kąty linowe są proporcjonalne.

§ 331. W § 19, str. 14 mówiliśmy, że kątom płaskim możemy przypisać dwa zwroty, wprost sobie przeciwne. Możemy to samo powiedzieć o dwuścianach. Wyobraźmy sobie mianowicie obserwatora, który stoi na płaszczyźnie α (rys. 294) i ma głowę zwróconą w kierunku strzałki; jeżeli dla takiego obserwatora kąt linowy $\sphericalangle AOB$ (a wraz z nim i dwuścian) powstaje przez obrót półprostej OA (półpłaszczyzny OAK) w zwrocie, przeciwnym ruchowi strzałek zegaru, a więc od prawej ręki ku lewej, wówczas kąt $\sphericalangle AOB$ i dwuścian nazywamy *dodatnimi*.

W przeciwnym razie uważamy kąt linowy i dwuścian za *ujemne*.



Rys. 295.

§ 332. Dwuścian oznaczać będziemy w dwojaki sposób:

symbol $\sphericalangle(\alpha\beta)$ oznaczać będzie klin między płaszczyznami α i β ;

symbol $\sphericalangle AB(CD)$ oznaczać będzie klin, którego krawędzią jest prosta AB , ścianami zaś są płaszczyzny $[ABC]$ i $[ABD]$ (rys. 295).

Ćwiczenia LIII. 1. Kąt ostry (lub rozwarty) rzutuje się na płaszczyznę w postaci kąta ostrego (lub rozwartego), jeżeli jedno jego ramię jest równoległe do płaszczyzny rzutów.

2. Zbadać kliny odpowiadające sobie, jednostronne etc., które otrzymamy, jeżeli dwie równoległe płaszczyzny przetniemy dowolną trzecią płaszczyzną.

3. Jeżeli na jednej z dwóch przecinających się płaszczyzn wykreślimy wszelkie możliwe proste, wówczas okaże się, że ta z nich, która jest prostopadła do krawędzi, tworzy największy kąt z drugą płaszczyzną.

4. Zbudować płaszczyznę, dzielącą dany klin na połowy (t. j. zbudować *płaszczyznę dwusieczną*). Jakim miejscem geometrycznym jest ta płaszczyzna?

5. Dana jest płaszczyzna α i na niej prosta m . Przez m przesunąć płaszczyznę, która tworzyłaby z płaszczyzną α klin o danym kącie linowym.

6. Przez dany punkt poprowadzić prostą, któraby do dwóch danych przecinających się płaszczyzn była nachylona pod danymi kątami.

7. Mając dany klin, wystawiamy w punktach A i B dwie proste prostopadłe do jednej jego ściany. Odległości punktów A , B od

krawędzi klina równają się odpowiednio m cm. i k cm.; odcinek pierwszej prostopadłej, zawarty między ścianami klina, równa się a cm.; obliczyć odpowiedni odcinek drugiej prostopadłej.

8. Z punktu A na ścianie klina, którego kąt linjowy $= 60^\circ$, prowadzimy dwie prostopadłe: jedną do drugiej ściany, drugą zaś do krawędzi klina. Pierwsza z nich równa się 16 cm.; obliczyć długość drugiej z dokładnością do 0,1 cm.

KSIĘGA VI.

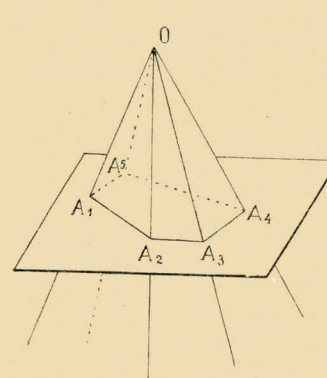
O kątach bryłowych i o wielościanach.

ROZDZIAŁ I.

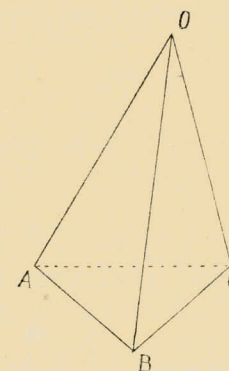
O kątach bryłowych (narożach).

§ 333. Niech będzie dany dowolny wielokąt (wypukły) $A_1 A_2, \dots, A_n, \dots$. Jeżeli wierzchołki jego połączymy prostymi z punktem O , nie leżącym w płaszczyźnie wielokąta, otrzymamy figurę, zwaną *kątem bryłowym albo narożem*.

Naroże ograniczone jest przez n kątów płaskich $\sphericalangle A_1 O A_2, \sphericalangle A_2 O A_3, \dots, \sphericalangle A_n O A_1$, które nazywamy *ścianami naroża*. Półproste $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ nazywamy *krawędziami*, punkt O zaś wierzchołkiem naroża.



Rys. 296.



Rys. 297.

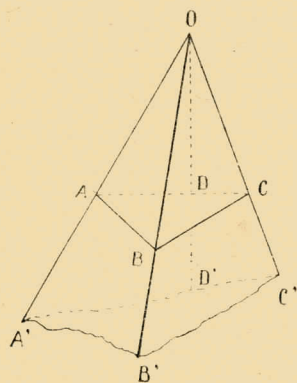
Naroże, mające trzy tylko ściany i trzy krawędzie, zwie się *trójszczianem*.

Trójszczian ma 3 kliny (jakie?). Naroże o n ścianach ma n klinów.

Trójszczian, odpowiadający rysunkowi 297, oznaczamy symbolem $O(ABC)$; analogicznie naroże wielościenne na rys. 296 oznaczylibyśmy symbolem $O(A_1A_2A_3A_4A_5)$.

§ 334. Twierdzenie. *Suma dwóch ścian trójszczianu jest zawsze większa od trzeciej ściany.*

Wystarczy dowieść tego twierdzenia dla największej ściany.



Rys. 298.

Niech będzie dany trójszczian $O(ABC)$, jak na rys. 293, i niech największą jego ścianę stanowi kąt $\sphericalangle AOC$. Mamy dowieść, że

$$\sphericalangle AOC < \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC.$$

W tym celu na największej ścianie odkładamy kąt

$$\sphericalangle AOD = \sphericalangle AOB,$$

oraz odkładamy

$$OD' = OB',$$

poczym obieramy na krawędzi OC dowolny punkt C i przez trzy punkty A, B, C przesuwamy płaszczyznę, która przecina, oczywiście, trójszczian. W przekroju powstaje trójkąt $\triangle ABC$.

Zauważmy najpierw, że

$$\triangle AOB \equiv \triangle AOD \quad (\text{dlaczego?}),$$

$$\text{zatem} \quad AB \equiv AD \dots \dots \dots (1)$$

Ale z $\triangle ABC$ mamy nierówność

$$AC < AB + BC$$

$$\text{czyli} \quad AD + DC < AB + BC$$

Stąd i z równości (1) wynika, że

$$DC < BC \dots \dots \dots (2)$$

Ponieważ trójkąty $\triangle DOC, \triangle BOC$ mają po dwa boki równe (które?), lecz trzecie ich boki nie są sobie równe,

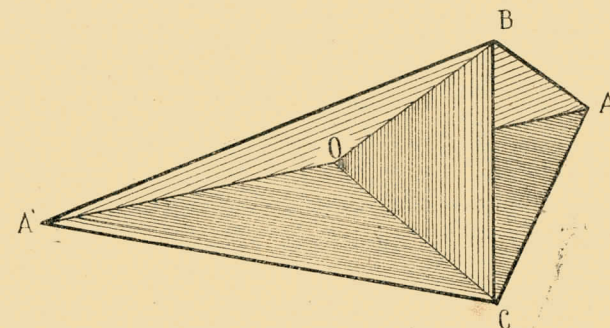
zatem naprzeciw większego boku leży większy kąt. W ten sposób z nierówności (2) wynika, że

$$\sphericalangle DOC < \sphericalangle BOC,$$

a więc również

$$\sphericalangle AOC < \sphericalangle BOC + \sphericalangle AOB.$$

§ 335. Twierdzenie. *Suma ścian trójszczianu jest mniejsza od czterech kątów prostych.*



Rys. 299.

Niech będzie dany trójszczian $O(ABC)$. Przedłużmy jego krawędź OA poza wierzchołek. Powstanie w ten sposób nowy trójszczian $O(A'BC)$, który ma z danym wspólną ścianę $\sphericalangle BOC$, dwie zaś drugie ściany $\sphericalangle BOA', \sphericalangle COA'$ są kątami przyległymi do ścian $\sphericalangle AOB, \sphericalangle COA$ pierwszego naroża.

Mamy tedy

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle A'OB + \sphericalangle AOC + \sphericalangle A'OC = 360^\circ \dots (1)$$

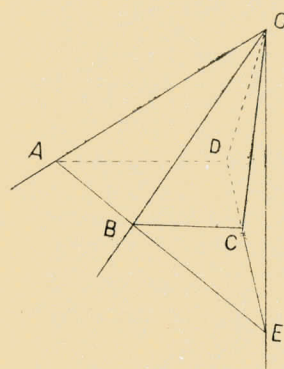
Ale zważmy, że w trójszczanie $O(A'BC)$ mamy

$$\sphericalangle A'OB + \sphericalangle A'OC > \sphericalangle BOC;$$

stąd i z równości (1) wynika, że

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle AOC + \sphericalangle BOC < 360^\circ.$$

Uwaga. Twierdzenie to daje się rozszerzyć na dowolne kąty bryłowe wypukłe. Niech będzie dane np. naroże czworosieczne $O(ABCD)$. Płaszczyzny AOB i DOC nie są do siebie równoległe. Niech OE będzie krawędzią tych płaszczyzn. (Na rysunku przecięliśmy naroże płaszczyzną $ABCD$, aby uwidocznili, iż OE jest istotnie krawędzią płasz-



Rys. 300.

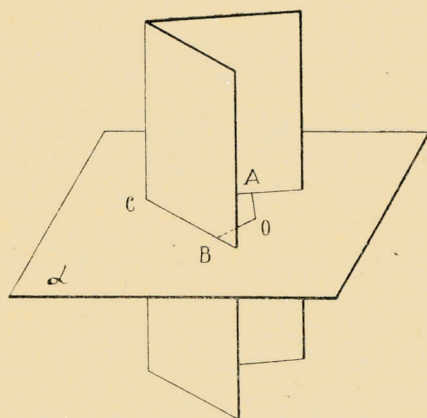
czyzn OAB i ODC). Naroże czworościenne dane zastąpiliśmy trójscianem $O(ADE)$, przez co powiększyliśmy sumę ścian naroża, gdyż

$$\sphericalangle BOC < \sphericalangle BOE + \sphericalangle COE$$

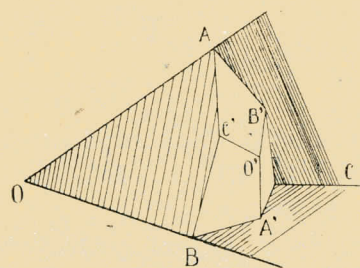
(dlaczego?).

Suma ścian trójscianu jest mniejsza od kąta pełnego, zatem suma ścian w narożu czworościennym była tym bardziej mniejsza od 360° .

§ 336. Dwa trójskiany takie, jak $O(ABC)$ i $O(A'BC)$ na rys. 299 nazywamy *przyległymi*. Mają one wspólną ścianę, a pozostałe dwie ściany jednego są kątami przyległymi do odpowiednich dwu ścian drugiego,



Rys. 301.



Rys. 302.

Opierając się na tym spostrzeżeniu, możemy wprowadzić pojęcie *trójskianów biegunowych albo spełniających się*.

Niech będzie dany trójskian $O(ABC)$. Wewnątrz niego obieramy dowolny punkt O' i prowadzimy do ścian trzy pro-

stopadłe $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$. W ten sposób powstaje nowy trójskian $O(A'B'C')$, który nazywamy *biegunowym* albo *spełniającym się* z danym.

Łatwo widzieć, że *ściany jednego trójskianu spełniają się z kątami linowymi drugiego* (dlaczego?).

§ 338. Dla trójskianów możemy wprowadzić symbole analogiczne do tych, którymi posługujemy się przy badaniu trójkątów. Każdy mianowicie klin możemy oznaczyć jedną dużą literą z dodaniem znaku kąta, gdyż z § 330 wynika, że mierzenie klinów zastąpić można przez mierzenie ich kątów linowych. Np. na rys. 303 klin o krawędzi OA oznaczylibyśmy symbolem $\sphericalangle A$; analogicznie mielibyśmy na tej samej figurze $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$ jako symbole dwóch pozostałych klinów.

Ściany możemy oznaczyć literami małymi. Wobec tego ścianę $\sphericalangle AOB$ oznaczylibyśmy przez $\sphericalangle c$, jako przeciwną klinowi $\sphericalangle C$, ścianę $\sphericalangle AOC$ oznaczylibyśmy przez $\sphericalangle b$, jako przeciwną klinowi $\sphericalangle B$, ścianę $\sphericalangle BOC$ oznaczylibyśmy przez $\sphericalangle a$, jako przeciwną klinowi $\sphericalangle A$.

Tak samo na rys. 304 w trójskianie o wierzchołku O' mielibyśmy kliny $\sphericalangle A'$, $\sphericalangle B'$, $\sphericalangle C'$ i ściany $\sphericalangle a'$, $\sphericalangle b'$, $\sphericalangle c'$.

§ 339. Twierdzenie. Suma klinów trójskianu zawiera się pomiędzy 2δ i 6δ .

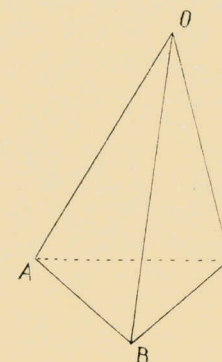
Aby tego dowieść, wystarczy zbudować dwa dowolne trójskiany spełniające się, jak na rys. 304. Jakoż mamy:

$$\begin{aligned}\sphericalangle a + \sphericalangle A' &= 2\delta \\ \sphericalangle b + \sphericalangle B' &= 2\delta \\ \sphericalangle c + \sphericalangle C' &= 2\delta,\end{aligned}$$

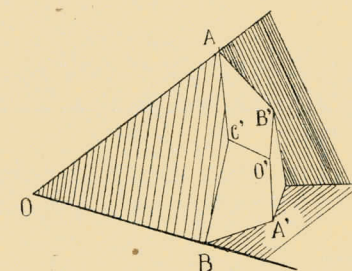
a więc $(\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c) + (\sphericalangle A' + \sphericalangle B' + \sphericalangle C') = 6\delta$,

ponieważ zaś $\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c < 4\delta$,

zatem $2\delta < \sphericalangle A' + \sphericalangle B' + \sphericalangle C' < 6\delta$.

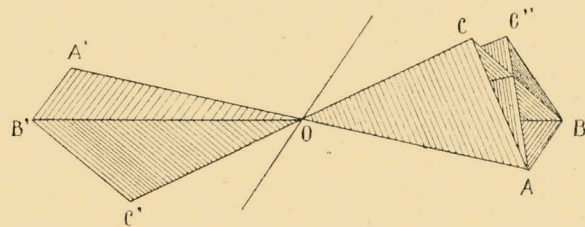


Rys. 303.



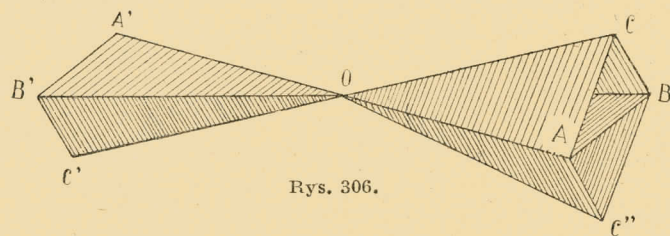
Rys. 304.

§ 340. Poznaliśmy zasadnicze własności klinów i ścian trójscianu. Z kolei wypadałoby zastanowić się nad pojęciem równości naroży wogóle i trójscianów w szczególności. Zdawałoby się, że równe trójszcziany można określić jako takie, które mają odpowiednio równe ściany i kliny. Łatwo jednak możemy się przekonać, że takie określenie jest niedostateczne.



Rys. 305.

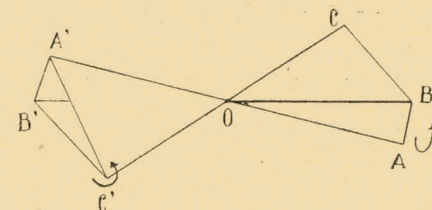
Jakoż obierzmy dowolny trójszczian $O(ABC)$ i przedłużmy wszystkie jego krawędzie poza wierzchołki (rys. 305). Otrzymamy w ten sposób t. zw. *trójszczian wierzchołkowy* $O(A'B'C')$. Rzecz jasna, że wszystkie ściany i kliny jednego trójszczanu równają się odpowiednim elementom drugiego, a jednak twierdzą, że trójszczanów tych nie możemy uważać za równe sobie w tym sensie, w jakim zwykle mówimy o równości dwóch figur materialnych. Istotnie, gdybyśmy mieli dwa równe sobie materialne trójszczany o niezmiernie cienkich ścianach, wówczas można byłoby jeden z nich dokładnie nałożyć na drugi, tymczasem z trójszczanami wierzchołkowymi uczynić tego nie można. Gdybyśmy chcieli materialny trójszczian $O(A'B'C')$ nałożyć na $O(ABC)$, wówczas moglibyśmy albo obrócić go o 180° dookoła punktu O tak, by $\sphericalangle A'OB'$ upadł na $\sphericalangle AOB$, przyczem ściany $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle A'OB'$ pozostawałyby podczas tego ruchu zawsze w jednej płaszczyźnie (rys. 306), albo też możnaby $O(A'B'C')$ obrócić również o 180° dookoła dwusiecznej kąta $\sphericalangle A'OB$ (rys. 305). Rzecz prosta, że podczas tego ruchu ściany $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle A'OB'$ nie mogłyby leżeć w jednej płaszczyźnie.



Rys. 306.

W pierwszym przypadku krawędź OC' znalazłaby się pod płaszczyzną AOB (rys. 306), w drugim zaś krawędź OA' upadłaby na OB , krawędź zaś OB' upadłaby na OA , wobec czego krawędź OC' przybrałaby położenie OC na rys. 305.

Widzimy tedy, że gdy mowa o równych trójszczanach, musimy uwzględniać nie tylko wielkości klinów i ścian, lecz i porządek, w jakim są one rozmieszczone. Istotnie, wyobraźmy sobie, że ktoś, znajdując się w wierzchołku O trójszczanu $O(ABC)$, zwrócony jest twarzą ku otworowi tego trójszczanu. Takiemu obserwatorowi wydawać się będzie, iż krawędzie OA, OB, OC następują po sobie w zwrocie, przeciwnym ruchowi wskazówek zegara (rys. 307). Jeżeli jednak ten sam obserwator zwróci się twarzą ku otworowi trójszczanu wierzchołkowego $O(A'B'C')$, wówczas krawędzie OA', OB', OC' będą, z jego punktu widzenia, następowały po sobie w zwrocie, zgodnym z ruchem wskazówek zegara.



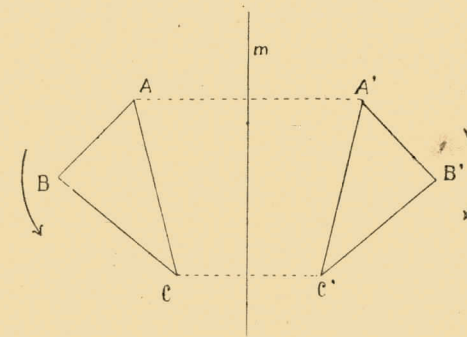
Rys. 307.

W ten sposób obserwacja skłania nas do przypisywania trójszczanom zwrotów. Zwrot trójszczanu $O(ABC)$ w powyższym przykładzie nazywamy dodatnim, zwrot zaś trójszczanu $O(A'B'C')$ nazywamy ujemnym.

Łatwo dostrzec, iż *trójszczany wierzchołkowe są symetryczne względem środka O* , jeżeli dla figur przestrzennych zachowamy to samo określenie symetrii względem środka, które podaliśmy w § 95, (str. 72) dla figur płaskich.

Niemożliwość nałożenia na siebie trójszczanów symetrycznych jest zupełnie analogiczna do pewnego zjawiska planimetrycznego.

Niech będzie dany trójkąt $\triangle ABC$, nie posiadający kątów równych. Jeżeli trójkąt ten przekształcimy symetrycznie względem dowolnej osi m , otrzymamy trójkąt $\triangle A'B'C'$,



Rys. 308.

mający te same kąty i boki, co i trójkąt dany. Gdybyśmy jednak chcieli trójkąt materialny $\triangle A'B'C'$ doprowadzić do przystania z trójkątem $\triangle ABC$, nie opuszczając płaszczyzny, w której oba one leżą, okazałoby się to rzeczą niemożliwą: trzeba byłoby jeden z nich wyjąć z płaszczyzny rysunku, obrócić na drugą stronę i wówczas dopiero nałożyć na drugi trójkąt.

To samo zjawisko mamy przy trójscianach wierzchołkowych: nie możemy ich doprowadzić do przystania, gdyż nie możemy jednego z nich wyjąć z przestrzeni trójwymiarowej, w której się oba znajdują.

§ 341. Wszystkie te rozważania prowadzą nas do następującego

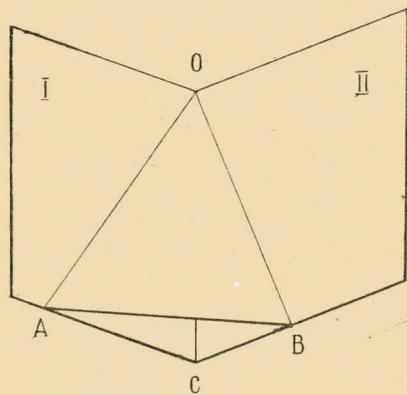
Określenie. Dwa trójskiany nazywamy równymi sobie, jeżeli mają one odpowiednio równe ściany i kliny i jednakowe zwroty.

Aby zaznaczyć, że dwa trójskiany T_1 i T_2 są sobie równe, będziemy pisali $T_1 \equiv T_2$.

§ 342. Jak przy badaniu trójkątów, nasuwa się pytanie, czy przy rozpoznaniu równości trójskianów musimy uwzględnić wszystkie sześć równości między klinami i ścianami, czy też wystarczy zbadanie niektórych z nich.

Odpowiedź na to znajdziemy w następujących zadaniach i twierdzeniach.

§ 343. Zadanie I. Zbudować trójskian, mając dany jeden jego klin i dwie ściany przyległe do tego klinu.



Rys. 309.

Niech będzie dany klin o krawędzi OC , zawarty między płaszczyznami I i II (rys. 309) oraz dwa kąty płaskie $\sphericalangle \alpha$ i $\sphericalangle \beta$. Zbudujemy na płaszczyźnie I kąt $\sphericalangle AOC = \sphericalangle \alpha$, na płaszczyźnie zaś II kąt $\sphericalangle BOC = \sphericalangle \beta$. Przez proste OA , OB przesunąć możemy tylko jedną płaszczyznę, trójskian więc $O(ABC)$ jest w zupełności wyznaczony.

Tak więc mając dany klin i dwie przyległe do niego ściany, możemy zbudować jeden i tylko jeden trójskian $O(ABC)$, mający dany zwrot.

Powiadam: „mający dany zwrot“, gdyż mogliśmy równie dobrze odłożyć $\sphericalangle \beta$ na płaszczyźnie II, kąt $\sphericalangle \alpha$ zaś na płaszczyźnie I, ale otrzymany trójskian miałby zwrot przeciwny.

Wynika stąd następujące

§ 344. Twierdzenie. Dwa trójskiany są albo równe, albo symetryczne, jeżeli mają po równym klinie, zawartym między dwiema odpowiednio równymi ścianami.

§ 345. Twierdzenie. Dwa trójskiany równają się sobie, albo są symetryczne, jeżeli mają po równej ścianie, zawartej między dwoma odpowiednio równymi klinami.

Istotnie, jeżeli w trójskianach T_1 i T_2 mamy

$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2 \quad \sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2 \quad \sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_2,$$

wówczas w trójskianach T'_1 i T'_2 spełniających się z danymi, musi być

$$\sphericalangle a'_1 = \sphericalangle a'_2 \quad \sphericalangle b'_1 = \sphericalangle b'_2 \quad \sphericalangle c'_1 = \sphericalangle c'_2,$$

wobec tego, na mocy § 343, musi być

$$T'_1 \equiv T'_2,$$

a stąd wynika (§ 337, 341), że i

$$T_1 \equiv T_2.$$

§ 346. Zadanie II. Zbudować trójskian, mając dane trzy jego ściany $\sphericalangle a$, $\sphericalangle b$, $\sphericalangle c$.

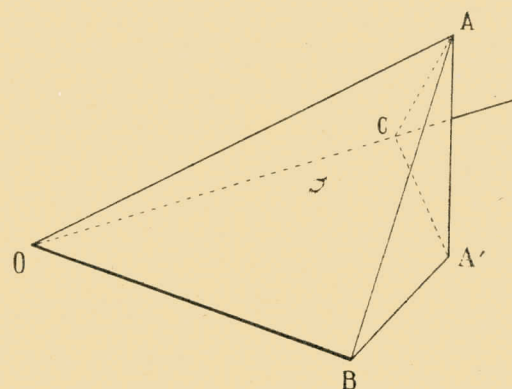
Rzecz prosta, iż te trzy kąty powinny spełniać warunki, zawarte w twierdzeniach §§ 334, 335.

Przeprowadźmy analizę zadania. Niech $O(ABC)$ będzie żądanym trójskianem. Jeżeli z dowolnego punktu A na krawędzi OA poprowadzimy

$$AB \perp OB, \quad AC \perp OC$$

i jeżeli A' jest rzutem punktu A na ścianę COB , wówczas musi być również

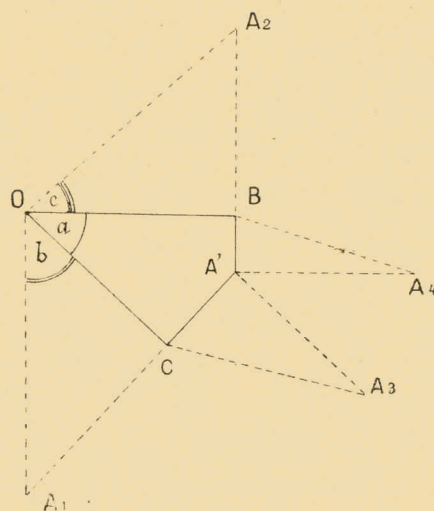
$$A'C \perp OC, \quad A'B \perp OB \quad (\text{dlaczego?})$$



Rys. 310.

sujmy t. zw. *siatkę* figury. Otrzymamy figurę taką, jak na rys. 311, przyczem odcinki BA' , BA_2 , leżą na jednej prostej, odcinki zaś $A'C$, CA_1 leżą na drugiej prostej, a prócz tego mamy $BA_2 = BA_4$; $A'A_3 = A'A_4$; $CA_1 = CA_3$.

Teraz już z łatwością przeprowadzić możemy konstrukcję trójscianu. W tym celu budujemy na płaszczyźnie trzy kolejne kąty $\sphericalangle c$, $\sphericalangle a$, $\sphericalangle b$ o wspólnym wierzchołku O , na dwóch skrajnych półprostych odkładamy dowolne, lecz równe sobie odcinki



Rys. 311.

$OA_1 = OA_2$
poczynam kreślić z punktów A_1 , A_2 prostopadłe do ramion kąta $\sphericalangle a$, które przecinają te ramiona w punktach B , C , same zaś przecinają się w punkcie A' . W punkcie A' wystawiamy prostopadłe do prostych $A'A_1$, $A'A_2$, z B i z C kreślimy koła promieniami BA_2 , CA_1 , tak iż otrzymujemy

$$BA_4 = BA_2, CA_3 = CA_1.$$

Teraz pozostaje już

Tak więc kąty $\sphericalangle A'CA$, $\sphericalangle A'BA$ są kątami linjowymi dwuścianów $\sphericalangle C$ i $\sphericalangle B$

Figura nasza składa się z czworoboku $OBA'C$ o dwóch kątach prostych i z czterech trójkątów prostokątnych. Wykonajmy teraz kład tej figury na płaszczyźnie OBC czyli nary-

tylko złożyć z powrotem tę siatkę czyli w punkcie A' wystawić prostopadłą do płaszczyzny BOC i na prostopadłej odłożyć odcinek

$$A'A = A'A_3 = A'A_4.$$

oraz połączyć punkt A z punktem O .

Ponieważ siatkę możnaby złożyć po jednej lub po drugiej stronie płaszczyzny (czyli na prostopadłej, wystawionej w A' , możnaby odcinek $A'A = A'A_3$ odłożyć po obu stronach płaszczyzny), zatem możnaby zbudować dwa trójsčiany, które jednak miałyby różne zwroty. Jeśli więc zwrot trójsčianu został zgóry wyznaczony, wówczas zadanie nasze ma tylko jedno rozwiązanie. *)

§ 347. Z jednoznaczności powyższej konstrukcji wynika

Twierdzenie. Dwa trójsčiany równają się sobie (albo też są z sobą symetryczne) jeżeli trzy śčiany jednego równają się odpowiednio trzem śčianom drugiego.

§ 348. Przez zastosowanie takiej samej metody, jak w § 345, otrzymujemy stąd

Twierdzenie. Dwa trójsčiany równają się sobie (albo są symetryczne), jeżeli trzy kliny jednego równają się odpowiednio trzem klinom drugiego.

Istotnie, jeżeli mamy dane trójsčiany T_1 , T_2 takie, iż

$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2, \sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2, \sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_2$$

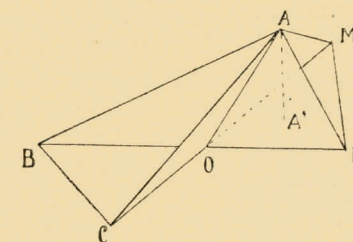
wówczas budujemy trójsčiany T'_1 , T'_2 , spełniające się z nimi, zatem musi być (dlaczego?)

$$\sphericalangle a'_1 = \sphericalangle a'_2, \sphericalangle b'_1 = \sphericalangle b'_2, \sphericalangle c'_1 = \sphericalangle c'_2$$

Wynika stąd, iż mamy

$$T'_1 \equiv T'_2.$$

*) Możnaby zarzucić analizę naszej i konstrukcji, że nie uwzględniłmy przypadku, gdy punkt A' nie upadnie wewnątrz kąta $\sphericalangle OBC$, jak np. na rys. 312. Mamy wtedy jednak wyjście bardzo proste: zamiast trójsčianu $O(ABC)$, budujemy najpierw trójsčian przyległy $O(MAN)$.



Rys. 312.

a wobec tego musi być również

$$T_1 \equiv T_2.$$

Ćwiczenia LIV. 1. Jeżeli w trójscianie $O(ABC)$ mamy $\sphericalangle a = \sphericalangle b$, wówczas musi być również $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

2. Zbadać twierdzenie odwrotne do poprzedniego.

Dowody obu tych twierdzeń porównać z dowodami twierdzeń w §§ 50 i 61 (str. 35 i 43).

3. Czy poprzedniego twierdzenia odwrotnego nie dałoby się dowieść metodą, analogiczną do metody zadania 6 na str. 44?

4. Jeżeli w trójscianie $O(ABC)$ mamy $\sphericalangle a = \sphericalangle b$, wówczas płaszczyzna dwusieczna klina $\sphericalangle C$ jest prostopadła do ściany $\sphericalangle c$ i dzieli ją na połowy.

5. Sformułować i zbadać własności trójscianu, analogiczne do tych własności trójkąta równoramiennego, które stanowią treść zadań 3 i 4 na str. 37.

6. To samo pytanie w stosunku do zadania 5 na str. 37.

7. Na rys. 311 odszukać kąty linowe dwuscianów $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$. Wskazać sposób zbudowania kąta linowego dla trzeciego dwuscianu.

8. Zbudować trójscian, mając dane trzy jego kliny.

9. Dwa trójszciany o ścianach odpowiednio do siebie równoległych albo równają się sobie, albo są względem siebie symetryczne.

10. Mamy dane trzy trójszciany, przyczym pierwszy jest symetryczny z drugim, drugi zaś z trzecim. Wykazać, iż pierwszy i trzeci równają się sobie.

11. Jeżeli dwa naroża trójscienne $O(ABC)$ i $O(ABC')$ mają wspólną ścianę $\sphericalangle AOB$ i jeżeli krawędź OC' drugiego naroża leży wewnątrz pierwszego, wówczas suma dwu pozostałych ścian drugiego naroża jest mniejsza od sumy odpowiednich dwóch ścian pierwszego.

Jakie jest analogiczne twierdzenie w planimetrii?

12. Na ścianie trójscianu $O(ABC)$ kreślimy dowolną prostą OD . Dowieść, że suma trzech kątów, zawartych między tą prostą a krawędziami trójscianu, jest mniejsza od sumy trzech ścian trójscianu.

13. Zbadać to samo zagadnienie w przypadku, gdy prosta OD leży wewnątrz trójscianu.

14. Jeżeli wykreślimy dwusieczne (wewnętrzne) ścian trójscianu, wówczas suma kątów, zawartych między każdą dwusieczną i przeciwległą krawędzią, jest mniejsza od sumy ścian trójscianu.

15. Jeżeli w trójscianie dwie ściany są kątami prostymi, wówczas przeciwległe im kliny są też proste, i odwrotnie.

16. Jeżeli w trójscianie jedna ze ścian równa się kątowi linijnemu przeciwległego klina, wówczas dwie pozostałe ściany albo równają się kątowi linijnym przeciwległych klinów, albo spełniają się z tymi kątami.

17. Mając dane dwie ściany i kąt linowy zawartego między nimi klina, zbudować (planimetrycznie) pozostałe elementy trójscianu.

18. To samo zadanie, jeżeli mamy dane kąty linowe dwóch klinów oraz zawartą między nimi ścianę.

19. To samo zadanie, jeżeli mamy dane kąty linowe wszystkich trzech klinów.

20. Dany jest trójscian, którego wszystkie ściany są kątami prostymi. Przeciąć go płaszczyzną tak, by w przekroju otrzymać trójkąt, równający się danemu trójkątowi. Konstrukcja planimetryczna.

21. Na danej płaszczyźnie α znaleźć punkt jednakowo odległy od wszystkich ścian danego trójscianu. (Konstrukcja w przestrzeni).

22. Znaleźć punkt, którego odległość od trzech ścian trójscianu równałaby się danym trzem odcinkom. (Konstrukcja przestrzenna).

ROZDZIAŁ II.

O wielościanach.

A. O graniastosłupach.

§ 349. Wielościanem nazywamy bryłę, ograniczoną przez wielokąty w taki sposób, że każdy bok jest wspólny dla dwóch wielokątów.

Wielokąty te nazywamy ścianami wielościanu; wierzchołki ich i boki nazywamy wierzchołkami i krawędziami wielościanu.

W każdym wierzchołku schodzą się conajmniej trzy ściany, tworząc naroże.

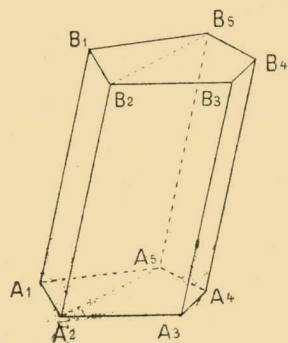
Przekątną wielościanu nazywamy odcinek, łączący którekolwiek dwa jego wierzchołki, nie leżące na jednej krawędzi.

Płaszczyzną przekątną nazywamy płaszczyznę, przesuniętą przez którekolwiek trzy wierzchołki, nie leżące na jednej ścianie. Np. na rys. 313 $A_2B_2B_5$ jest płaszczyzną przekątną.

Przekrojem przekątnym nazywamy wielokąt, który stanowi część tej płaszczyzny i jest śladem przecięcia wielościanu przez tę płaszczyznę. Np. czworobok $A_2B_2B_5A_5$ można nazwać przekrojem przekątnym.

Wielościan nazywamy wypukłym, o ile leży w całości po jednej stronie płaszczyzny każdej ściany. W książce niniejszej mówić będziemy wyłącznie o wielościanach wypukłych.

§ 350. Szczególnym rodzajem wielościanów są graniastosłupy. Jeżeli przez wszystkie wierzchołki wielokąta $A_1A_2A_3\dots A_n$ poprowadzimy równoległe, przebijające płaszczyznę wielokąta, i jeżeli wszystkie te równoległe przetniemy płaszczyzną, równoległą do płaszczyzny wielokąta $A_1A_2A_3\dots A_n$, otrzymamy wielościan, zwany graniastosłupem.



Rys. 313.

Graniastosłup jest ograniczony przez dwa wielokąty $A_1A_2A_3\dots A_n$, $B_1B_2B_3\dots B_n$, które równają się sobie (dlaczego?), oraz przez n ścian bocznych, mających kształt równoległoboków. Wielokąty te nazywamy

podstawami graniastosłupa.

Odcinki A_1B_1 , A_2B_2 , nazywamy krawędziami bocznymi.

Jeżeli krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, graniastosłup nazywa się prostym; w przeciwnym razie nazywamy go pochylonym.

Odcinek, prostopadły do obu podstaw i zawarty pomiędzy nimi, nazywa się wysokością graniastosłupa.

Graniastosłup nazywamy równoległościanem, jeżeli podstawy jego są równoległobokami.

Jeżeli w równoległościanie prostym podstawy mają kształt prostokątów, wówczas bryła ta zwie się prostopadłościanem.

Prostopadłościan, w którym wszystkie ściany równają się sobie, nazywa się sześcianem.

Trzy krawędzie prostopadłościanu, schodzące się w jednym wierzchołku, nazywamy jego wymiarami.

§ 351. Polem powierzchni bocznej graniastosłupa nazywamy sumą pól wszystkich jego ścian bocznych.

Polem powierzchni zupełnej nazywamy sumę pól ścian bocznych i obu podstaw graniastosłupa.

§ 352. Określenie. Dwa wielościany równają się sobie, jeżeli ściany i naroża jednego z nich równają się ścianom i narożom drugiego i są względem siebie jednakowo położone.

§ 353. Określenie. Dwa graniastosłupy nazywamy równoważnymi, jeżeli dają się one podzielić na jednakową ilość wielościanów odpowiednio równających się sobie.*)

Możliwość takiego pojęcia wynika od razu z twierdzenia § 354.

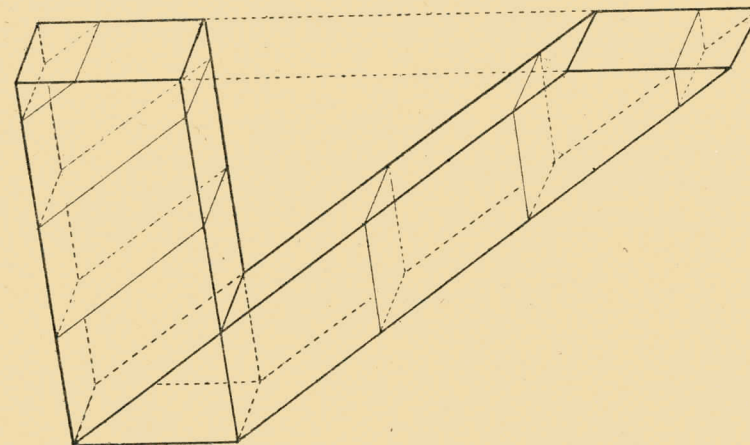
Wniosek. Dwa graniastosłupy równoważne trzeciemu są sobie równoważne (porówn. str. 153).

§ 354. Twierdzenie. Dwa równoległościany są sobie równoważne, jeżeli mają równe podstawy i wysokości.

W celu uproszczenia rozumowania założmy, że równoległościany mają wspólną podstawę dolną i że leżą oba po tej samej stronie wspólnej podstawy.

Mogą tu zachodzić dwa przypadki:

1) Górne podstawy równoległościanów zawierają się między tymi samymi dwiema prostymi równoległymi (jak na rys. 314).

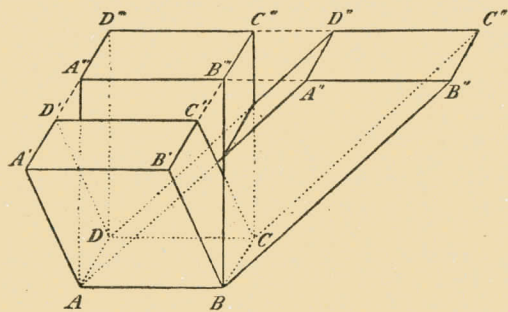


Rys. 314.

*) Jak widzimy, pojęcie równoważności określiliśmy tylko dla graniastosłupów, nie zaś dla wszystkich wielościanów.

W takim razie stosujemy dokładnie tę samą metodę postępowania, co w § 177, str. 154. Uczeń przeprowadzi dowód szczegółowo, kierując się rysunkiem 314.

2) Górne podstawy nie zawierają się między tymi samymi równoległymi, jak np. na rys. 315 równoległoboki $A'B'C'D'$ i $A''B''C''D''$. W takim razie przedłużamy boki obu równoległoboków; przecięcie się tych czterech prostych wyznaczy nam nowy równoległobok $A'''B'''C'''D'''$, równający się obu poprzednim. Ten nowy równoległobok przy-



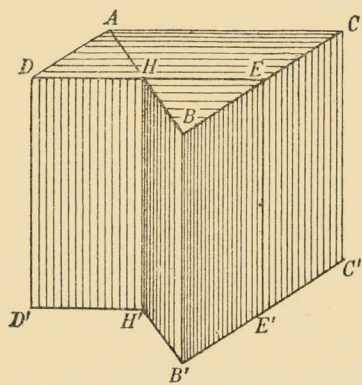
Rys. 315.

mujemy za górną podstawę trzeciego równoległościanu, mającego podstawę dolną wspólną z dwoma danymi równoległościanami.

Na mocy poprzedniego przypadku, zarówno pierwszy jak drugi równoległościan są równoważne trzeciemu, a więc są sobie równoważne.

§ 355. Zadanie I. Równoległościan przekształcić w równoważny prostopadłościan.

Zadanie II. Graniastosłup o podstawie trójkątnej przekształcić w równoważny równoległościan.



Rys. 316.

Zadanie III. Graniastosłup o dowolnej podstawie wielokątnej przekształcić w równoważny prostopadłościan.

Te trzy zadania uczeń rozwiąże sam.

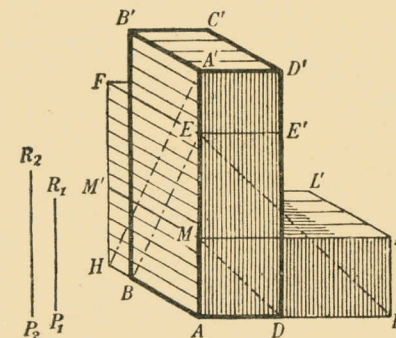
Zadanie IV. Mając dany prostopadłościan $ABCD A'B'C'D'$ zbudować drugi prostopadłościan, równoważny mu i mający

dwa wymiary odpowiednio równe dwom danym odcinkom P_1R_1 i P_2R_2 .

Najpierw w płaszczyźnie ściany $AA'B'B$ budujemy prostokąt $AHFE$, równoważny tej ścianie i mający bok $AH = P_1R_1$. Na podstawie $AHFE$ budujemy prostopadłościan o wysokości AD . Jest on równoważny prostopadłościanowi danemu (dlaczego?).

Z kolei przekształcamy $AEE'D$ w równoważny prostokąt $AMLK$, w którym $AK = P_2R_2$. Na tym prostokącie, jako na podstawie, budujemy prostopadłościan o wysokości AH : odpowiada on warunkom zadania (dlaczego?).

Zadanie V. Dany graniastosłup przekształcić w równoważny prostopadłościan o zadanej zgóry podstawie.



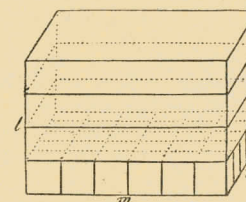
Rys. 317.

Czy na podstawie powyższych zadań oraz § 354 można twierdzić, iż graniastosłupy tworzą klasę wielkości geometrycznych? (Porównaj rozumowanie na str. 163).

§ 356. Z kolei możemy przejść do obliczania objętości graniastosłupów, przyczym założymy — jak to uczyniliśmy dla wielokątów — że równoważne graniastosłupy mają równe objętości.

Pojęcie objętości, jako liczby, związanej z prostopadłościanem, jest nam dobrze znane z kursu klas niższych.

Jeżeli mamy dany prostopadłościan, którego wymiary są spójmierne z obraną jednostką długości i wyrażają się np. liczbami (wymiernymi) m , n , l , wówczas możemy na jego dnie umieścić warstwę sześciątów jednostkowych (t. j. takich, których każda krawędź równa się jednostce długości), przyczym



Rys. 318.

warstwa ta zawierać musi mn sześciątów. Warstw takich możemy ułożyć l , zatem prostopadłościan zawiera mnl sześciątów jednostkowych. Liczba mnl nazywa się objętością prostopadłościanu.

O wiele trudniej przedstawia się sprawa, jeżeli wymiary prostopadłościanu są niespółmierne z jednostką długości.

Rozważmy odrazu przypadek najogólniejszy, gdy długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu wyrażają się liczbami niewymiernymi m, n, l .

Każdej z tych liczb (lub innymi słowami: każdemu z tych trzech przekrojów) odpowiada dwie klasy liczb wymiernych. Oznaczmy liczby, należące do „niższych” klas, przez m', n', l' , te zaś, które należą do „wyższych” klas, oznaczmy przez m'', n'', l'' .

Wyobraźmy sobie, iż zbudowaliśmy wszelkie możliwe prostopadłościany, których krawędzie wyrażają się liczbami wymiernymi, należącymi do klas „niższych”, a więc liczbami m', n', l' , oraz

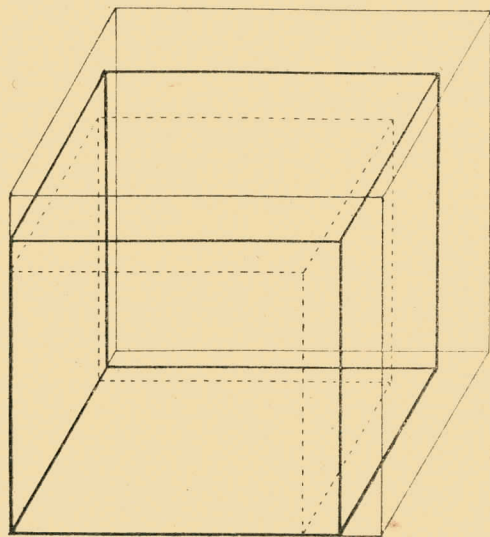
wszystkie prostopadłościany o krawędziach wymiernych, których długości wyrażają się liczbami m'', n'', l'' .

Rzecz prosta, iż pierwsze zawierać się będą wewnątrz danego prostopadłościanu, drugie zaś, przeciwnie, będą go w sobie zawierały (jak na rys. 319).

Objętości mniejszych prostopadłościanów (wewnętrznych) wyrażają się

iloczynem $m'n'l'$, objętości zaś prostopadłościanów większych (zewnętrznych), wyrażają się iloczynem $m''n''l''$.

W ten sposób powstają dwa nieskończone zbiory (dwie nieskończone klasy) liczb wymiernych:



Rys. 319.

klasa „niższa” liczb $m'n'l$,
i „wyższa” „ $m'n''l''$;

zgodnie z określeniem iloczynu liczb niewymiernych, te dwie klasy wyznaczają liczbę niewymierną

mnl .

Tę właśnie liczbę niewymierną nazwiemy objętością prostopadłościanu. W ten sposób znana nam z kursu elementarnego reguła obliczania objętości prostopadłościanu (która tam stosowała się tylko do figur o krawędziach wymiernych) pozostaje bez zmiany.

§ 357. To samo określenie objętości prostopadłościanu możemy sformułować tak:

Objętość prostopadłościanu jest to liczba, równająca się iloczynowi z pola podstawy przez długość wysokości prostopadłościanu.

Istotnie, w powyższym przykładzie pole podstawy równa się mn , długość zaś wysokości równa się l .

§ 358. Możemy teraz każdemu graniastosłupowi przypisać objętość w zupełności wyznaczoną.

Istotnie, każdy graniastosłup G możemy przekształcić w równoważny mu prostopadłościan P o tej samej wysokości, przyczem podstawy obu brył muszą być wielokątami równoważnymi sobie. Zakładając, że graniastosłupy równoważne mają równe objętości, możemy objętość prostopadłościanu P uważać za równą objętości graniastosłupa G . W ten sposób otrzymujemy następującą regułę:

Reguła. Aby obliczyć objętość graniastosłupa, mnożymy pole jego podstawy przez długość wysokości.

Ćwiczenia LV. 1. W równoległościanie przekątne dzielą się na połowy.

2. W równoległościanie dzielą się na połowy odcinki, łączące środki przeciwległych krawędzi, jak również odcinki, łączące środki przeciwległych ścian.

3. Zarówno przekątne, jak i płaszczyzny przekątne prostopadłościanu równają się sobie.

4. W prostopadłościanie kwadrat przekątnej równa się sumie kwadratów trzech jego wymiarów.

5. W prostopadłościanie suma kwadratów pól przekrojów przekątnych jest dwa razy większa od sumy kwadratów pól sześciu jego ścian.

6. Na dwóch przeciwległych ścianach równoległościanu kreśli my przekątne i przez nie prowadzimy przekroje przekątne; dowieść, że te dwa przekroje przekątne dzielą się na połowy.

7. Sformułować i zbadać twierdzenie odwrotne do poprzedniego.

8. Równoległościan jest prosty, jeżeli dwie jego płaszczyzny przekątne są prostopadłe do podstaw.

9. Graniastup o podstawie czworokątnej jest równoległościanem, jeżeli jego płaszczyzny przekątne przecinają się w jednym punkcie.

10. Przez końce trzech krawędzi równoległościanu, schodzących się w jednym wierzchołku, przesuwamy płaszczyznę; dowieść, iż dzieli ona w stosunku 1:2 przekątną równoległościanu, wychodzącą z tego samego wierzchołka.

11. W graniastoslupie o podstawie trójkątnej łączymy wierzchołki jednej podstawy ze środkami przeciwległych krawędzi drugiej podstawy. Dowieść, że trzy te odcinki przecinają się w jednym punkcie, który leży na prostej, łączącej środki ciężkości podstaw, i że dzielią się one w tym punkcie w stosunku 1:2.

12. W graniastoslupie trójkątnym przesuwamy płaszczyznę przez wierzchołki jednej podstawy i przeciwległe krawędzie drugiej podstawy; dowieść, że te trzy płaszczyzny przecinają się w jednym punkcie, leżącym na prostej, która łączy środki ciężkości podstaw.

13. Zbadać rozmaite możliwe przekroje sześciianu. W szczególności przeciąć sześciian płaszczyzną tak, by otrzymać sześciokąt foremny. Ile takich sześciokątów można utworzyć w danym sześciianie?

14. Odwrotnie: mając dany sześciokąt foremny, zbudować sześciian, którego przekrojem płaskim byłby ten sześciokąt.

15. Dane są trzy wymiary prostopadłościanu; zapomocą konstrukcji planimetrycznej zbudować figurę, którą otrzymamy, jeżeli prostopadłościan przetniemy płaszczyzną, przechodzącą przez krawędź podstawy i środki dwóch przeciwległych krawędzi bocznych.

16. Graniastoslup prosty o podstawie trójkątnej foremnej przecinamy płaszczyzną, przechodzącą przez krawędź podstawy i nachyloną do tej podstawy pod kątem 30° . Zbudować (za pomocą konstrukcji planimetrycznej) otrzymany w ten sposób przekrój, jeżeli mamy daną krawędź podstawy graniastoslupa i krawędź boczną. Jakie przypadki mogą tu zachodzić?

17. Zbudować krawędź sześciianu, mając dany obwód jego przekroju przekątnego.

18. Mając daną krawędź sześciianu, zbudować (za pomocą konstrukcji planimetrycznej) przekrój tego sześciianu, poprowadzony przez środek jego przekątnej prostopadłe do tej przekątnej.

19. Zbudować siatkę *) sześciianu, mając daną przekątną jego ściany.

20. Zbudować siatkę sześciianu, mając daną jego przekątną.

21. Zbudować siatkę graniastoslupa pochyłego o podstawie kwadratowej, mając daną krawędź jego podstawy, krawędź boczną oraz kąty między tą krawędzią boczną, a dwiema sąsiednimi krawędziami podstawy.

22. W tym samym graniastoslupie, o którym mowa w zadaniu poprzednim, zbudować przekrój przekątny.

23. W zadaniach 15—18 wyznaczaliśmy pewne figury za pomocą konstrukcji; uczeń spróbuje wyznaczyć te same figury za pomocą rachunku.

24. Mamy dany sześciian o krawędzi $= a$; ile razy należy zwiększyć jego krawędź, jeżeli chcemy, by objętość wzrosła w dwójnasób.

Uwaga. Zadanie 24 można z łatwością rozwiązać na drodze rachunkowej, natomiast odpowiednie zadanie konstrukcyjne (zbudować sześciian, którego objętość byłaby dwa razy większa od objętości sześciianu danego) nie daje się rozwiązać w sposób elementarny, t. j. za pomocą cyrkla i linijaka.

25. Powiększając długość krawędzi pewnego sześciianu o a m., zwiększamy jego objętość o b m.³ Obliczyć długość krawędzi.

26. Krawędzie prostopadłościanu mają odpowiednio a m., b m. i c m. długości; obliczyć długość krawędzi takiego sześciianu, żeby stosunek objętości obu brył równał się stosunkowi pól ich przekrojów przekątnych.

27. Rozwiązać to samo zadanie w założeniu, że stosunek objętości ma się równać stosunkowi pól powierzchni zupełnych obu brył.

28. Obliczyć objętość prostopadłościanu, w którym pole przekroju przekątnego $= a^2$, krawędzie zaś podstawy mają się do siebie tak, jak $b : c$.

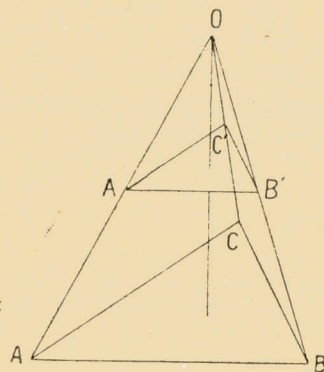
29. Obliczyć wymiary prostopadłościanu, mając dane: objętość jego V , pole powierzchni zupełnej $2S$ i obwód podstawy $2p$.

30. Podstawę równoległościanu prostego stanowi romb o boku a i kącie $\sphericalangle A = 60^\circ$. Większa przekątna równoległościanu nachylona jest do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Obliczyć objętość równoległościanu i pole jego przekroju przekątnego.

31. Obliczyć objętość i pole powierzchni bocznej prostopadłościanu, mając daną długość jego przekątnej ($= a$) i wiedząc, że dwie przekątne przecinają się pod kątem prostym, podstawa zaś ma kształt kwadratu.

*) Siatką bryły nazywamy rozwinięcie jej powierzchni na płaszczyźnie.

§ 361. Wyobraźmy sobie, iż przecięliśmy ostrosłup płaszczyzną, równoległą do podstawy. Podzieliliśmy go w ten sposób na dwie części, z których jedna (na rys. 321 górna część) jest ostrosłupem, druga zaś nosi nazwę *ostrosłupa ściętego* lub *pnia ostrosłupowego*.

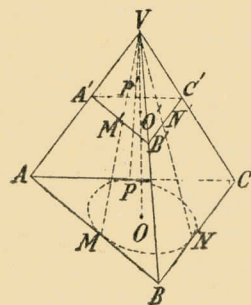


Rys. 321.

Pień ostrosłupowy ma dwie podstawy (na rys. 321 górną $A'B'C'$ i dolną ABC), które są wielokątami podobnymi. Ściany boczne pnia mają kształt trapezów. Odległość między dwiema podstawami pnia nazywamy jego *wysokością*.

Pień ostrosłupowy nazywamy *prostym*, jeżeli powstał z ostrosłupa prostego w sposób powyżej opisany. Np. na rys. 322 pień $ABCA'B'C'$ jest prosty. Odcinki MM' , NN' , PP' , będące wysokościami ścian bocznych w pniu prostym, nazywamy *apotemami pnia*.

Uczeń dowiedzie sam, iż apotemy pnia ostrosłupowego równają się sobie.



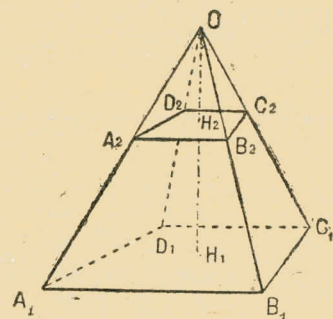
Rys. 322.

§ 362. Z wzoru na pole trapezu wynika następująca

Reguła. Aby obliczyć pole powierzchni bocznej pnia ostrosłupowego prostego, mnożymy długość jego apotemy przez połowę sumy obwodów obu jego podstaw.

§ 363. **Twierdzenie.** Jeżeli ostrosłup przecięliśmy płaszczyzną równoległą do podstawy, wówczas pole przekroju i pole podstawy są proporcjonalne do kwadratów odległości ich płaszczyzn od wierzchołka ostrosłupa.

Niech będzie dany ostrosłup $O A_1 B_1 C_1 D_1$ i niech płaszczyzna $A_2 B_2 C_2 D_2$, przecinająca ostrosłup, będzie równoległa do płasz-



Rys. 323.

czyzny podstawy. Oznaczając pola czworoboków $A_1 B_1 C_1 D_1$ oraz $A_2 B_2 C_2 D_2$ odpowiednio symbolami S_1 i S_2 , mamy dowieść, iż zachodzi proporcja

$$S_1 : S_2 = OH_1^2 : OH_2^2$$

gdzie OH_1 jest wysokością ostrosłupa.

Istotnie, na mocy § 266, str. 264 mamy:

$$S_1 : S_2 = A_1 B_1^2 : A_2 B_2^2,$$

ale

$$\frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} = \frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OH_1}{OH_2} \quad (\text{dlaczego?}),$$

a więc musi być również

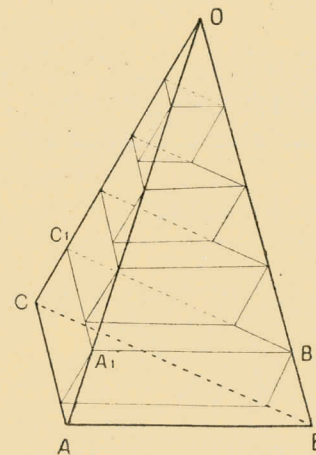
$$\frac{A_1 B_1^2}{A_2 B_2^2} = \frac{OH_1^2}{OH_2^2}$$

i twierdzenie zostało dowiedzione.

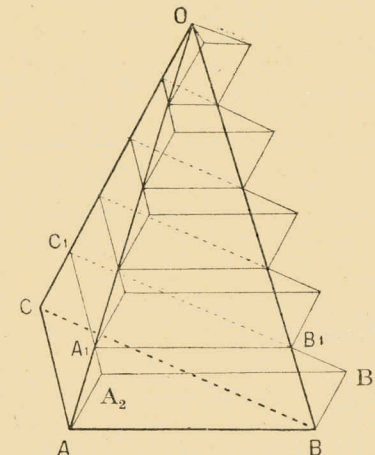
§ 364. Jak wiadomo, każdemu graniastosłupowi odpowiada pewna, w zupełności wyznaczona liczba, zwana jego objętością. Powstaje pytanie, czy można to samo powiedzieć o ostrosłupach i w jaki sposób, mając dany ostrosłup, można by obliczyć jego objętość?

Odpowiedź na pierwsze pytanie znajdziemy na drodze podobnej do tej, która doprowadziła nas do pojęcia pola koła.

Niech będzie dany dowolny ostrosłup. Na rys. 324 mamy wprowadzić ostrosłup o podstawie trójkątnej, ale preko-



Rys. 324.



Rys. 325.

namy się zaraz, że kształt podstawy nie gra żadnej roli w naszym rozumowaniu, tak iż otrzymany wynik stosuje się równie dobrze do ostrosłupów o podstawach dowolnych.

Wysokość ostrosłupa oznaczmy przez h , podzielmy ją na n części równych (na rys. 324 na 5 części) i przez punkty podziału przesunąć płaszczyzny, równoległe do podstawy, otrzymując w ten sposób n wielokątów podobnych, do których stosuje się twierdzenie § 363.

Na każdym z tych wielokątów, jako na podstawie, zbudujemy po dwa równe sobie graniastosłupy: jeden leżący nad wielokątem i wystający nazewnątrz piramidy (jak na rys. 325), drugi, położony pod tym samym wielokątem i zawierający się wewnątrz piramidy*). Wyjątek stanowi tu sama podstawa ABC piramidy, na której budujemy jeden tylko graniastosłup, mianowicie wystający. Niech przytym wysokość każdego graniastosłupa równa się $\frac{h}{n}$.

Graniastosłupy pierwszego rodzaju możemy nazwać krótko zewnętrznymi, graniastosłupy drugiego rodzaju — wewnętrznymi.

Zauważmy przedewszystkim, że dla każdego graniastosłupa zewnętrznego istnieje równy mu wewnętrzny. Wyjątek stanowi tylko pierwszy od dołu graniastosłup zewnętrzny $ABCA_2B_2C_1$: pomiędzy wewnętrznymi nie ma równego mu graniastosłupa.

Jeżeli teraz obliczymy objętości wszystkich graniastosłupów zewnętrznych i sumę ich oznaczmy przez Σ_z sumę zaś objętości wszystkich graniastosłupów wewnętrznych oznaczmy przez Σ_w , wówczas różnica

$$\Sigma_z - \Sigma_w$$

równać się będzie objętości graniastosłupa $ABCA_2B_2C_1$ (rys. 325).

Oznaczmy jeszcze przez S pole podstawy ABC .

*) Właściwie, oba rodzaje graniastosłupów należało zaznaczyć na tym samym rysunku, chcąc jednak uniknąć gmatwaniny linii, narysowaliśmy obok siebie dwie równe piramidy i na jednej z nich zaznaczyliśmy tylko graniastosłupy wystające, na drugiej zaś tylko zawierające się wewnątrz piramidy.

Objętość graniastosłupa $ABCA_2B_2C_1$ równa się $S \cdot \frac{h}{n}$,

$$\text{mamy tedy } \Sigma_z - \Sigma_w = S \cdot \frac{h}{n} = (Sh) \cdot \frac{1}{n}.$$

Zauważmy dalej, że część prawa tej równości składa się z dwóch czynników, z których jeden, mianowicie Sh jest liczbą stałą, drugi zaś czynnik, $\frac{1}{n}$ jest zmienny i może być uczyniony dowolnie małym przez zwiększenie mianownika n , a więc cały iloczyn $S \cdot \frac{h}{n}$ może być uczyniony dowolnie małym.

Widzimy tedy, że jeśli będziemy nieograniczenie zwiększali liczbę części, na które dzielimy wysokość piramidy, wówczas sumy Σ_z i Σ_w dążyć będą do wspólnej granicy.

Tę ich wspólną granicę nazywamy objętością piramidy. Mamy tedy następujące

Określenie. Objętością piramidy nazywamy liczbę, będącą wspólną granicą dwóch zmiennych liczb: sumy objętości graniastosłupów zewnętrznych i sumy objętości graniastosłupów wewnętrznych.

§ 365. Twierdzenie. Objętość ostrosłupa równa się trzeciej części iloczynu z pola podstawy przez długość wysokości ostrosłupa.

Do dowodu posłużmy nam ta sama konstrukcja, która doprowadziła nas do określenia objętości ostrosłupa.

Obliczmy mianowicie sumę Σ_z i znajdziemy granicę tej sumy, gdy n rośnie nieograniczenie.

Podstawy kolejnych graniastosłupów, poczynając od góry, oznaczmy przez $S_1, S_2, \dots, S_n$, objętość ich przez $v_1, v_2, \dots$.

Mamy

$$S_1 : S = \left(\frac{h}{n}\right)^2 : h^2$$

czyli

$$S_1 = \frac{S}{n^2}.$$

Dalej,

$$S_2 : S = \left(\frac{2h}{n}\right)^2 : h^2$$

czyli

$$S_2 = \frac{2^2 S}{n^2}.$$

W taki sam sposób znajdujemy, iż

$$S_3 = \frac{3^2 \cdot S}{n^2}$$

$$S_4 = \frac{4^2 \cdot S}{n^2},$$

.....

$$S_n = S = \frac{n^2 \cdot S}{n^2}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \Sigma_z &= v_1 + v_2 + \dots + v_n \\ &= \frac{S \cdot h}{n^3} (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2) \\ &= \frac{Sh}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad *) \end{aligned}$$

a dzieląc licznik i mianownik przez n^3 , mamy

$$\Sigma_z = \frac{Sh \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6}.$$

*) Wzór $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ można z łatwością otrzymać rozmaitymi sposobami. Najprostszy może jest sposób następujący:

W tożsamości $(1+x)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ podstawiamy kolejno na x wartości 1, 2, 3, 4, ... (n-1), n. Otrzymujemy ciąg tożsamości

$$2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$

$$4^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$$

$$\dots$$

$$n^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1.$$

Sumując te tożsamości kolumnami, redukując i oznaczając przez S_1 sumę liczb ciągu naturalnego, przez S_2 sumę kwadratów liczb ciągu naturalnego, mamy

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + n$$

$$\begin{aligned} \text{skąd} \quad 3S_2 &= n^3 + 3n^2 + 2n - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{i wreszcie} \quad S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aby wykazać, iż Σ_z dąży do granicy $\frac{Sh}{3}$, wystarczy zauważyć, że Σ_z stale maleje, gdy n rośnie (dlaczego?) i dowieść, że różnica $\Sigma_z - \frac{Sh}{3}$ może być uczyniona dowolnie małą.

Jakoż mamy

$$\begin{aligned} \Sigma_z - \frac{Sh}{3} &= \frac{Sh \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6} - \frac{Sh}{3} = \frac{Sh}{6} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) - 2 \right] \\ &= \frac{Sh}{6} \left[2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} - 2 \right] = \frac{Sh}{6} \left[\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right]. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy iloczyn, którego pierwszy czynnik $\frac{Sh}{6}$ jest stały, drugi zaś $\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}$ może być uczyniony dowolnie małym, a więc cały nasz iloczyn maleje nieograniczenie, gdy zwiększamy nieograniczenie liczbę n .

Dowodzi to, że istotnie stała liczba $\frac{Sh}{3}$ jest granicą zmiennej sumy Σ_z , a poprzednio już nazwaliśmy tę granicę objętością piramidy.

§ 366. Twierdzenie. Objętość pnia ostrosłupowego wyraża się wzorem

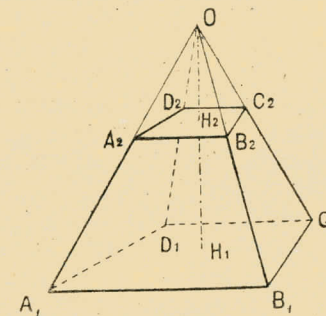
$$V = \frac{h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

gdzie przez S_1 i S_2 oznaczyliśmy pola podstaw pnia.

Objętość pnia możemy uważać jako różnicę objętości dwóch ostrosłupów

$$OA_1B_1C_1D_1 \text{ i } OA_2B_2C_2D_2$$

Oznaczając objętość tych ostrosłupów odpowiednio przez V_1 i V_2 , pola ich podstaw przez S_1 i S_2 , wysokości przez h_1 i h_2 wreszcie objętość i wysokość pnia przez V i h , mamy



Rys. 326.

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 - V_2 = \frac{S_1 h_1}{3} - \frac{S_2 h_2}{3} \\
 &= \frac{1}{3} [S_1 h_1 - S_2 (h_1 - h)] \\
 &= \frac{1}{3} [h_1 (S_1 - S_2) + h S_2] \\
 &= \frac{1}{3} [h_1 (\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}) (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}) + h S_2] \dots (1)
 \end{aligned}$$

Zauważmy dalej, że na mocy § 363 musi być

$$\begin{aligned}
 S_1 : S_2 &= h_1^2 : (h_1 - h)^2 \\
 \text{czyli} \quad \sqrt{S_1} : \sqrt{S_2} &= h_1 : (h_1 - h), \\
 \text{skąd} \quad h_1 &= \frac{h \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \dots (2)
 \end{aligned}$$

Podstawiając do wzoru (1) wartość na h_1 ze wzoru (2), mamy

$$V = \frac{h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

Ćwiczenia LVI. 1. Jeżeli w dowolnej piramidzie prostej przesuniemy przez każdą krawędź boczną płaszczyznę, prostopadłą do podstawy, wówczas wszystkie te płaszczyzny przetną się według jednej prostej.

2. Na jednej ze ścian czworoscianu kreślimy trzy środkowe i przez każdą z nich oraz przez krawędź, przeciwną tej środkowej, przesuwamy płaszczyzny. Dowieść, że trzy te płaszczyzny przecinają się według jednej prostej.

3. Łącząc środek ciężkości każdej ściany czworoscianu z przeciwnym wierzchołkiem, otrzymujemy cztery odcinki, które przecinają się w jednym punkcie (zwanym środkiem ciężkości czworoscianu) i dzielą się w tym punkcie tak, że część każdego odcinka przyległa do wierzchołka jest trzy razy większa od części pozostałej.

4. Wewnątrz czworoscianu $ABCD$ znaleźć taki punkt, że jeśli go połączymy ze wszystkimi wierzchołkami, otrzymamy cztery czworosciany, których podstawami są ściany czworoscianu $ABCD$ i których objętości równają się sobie.

[Wskazówka: Sformułować i rozwiązać analogiczne zadanie dla trójkąta].

5. Odcinki, łączące środki przeciwnych krawędzi czworoscianu, przecinają się w środku ciężkości czworoscianu.

6. Środki krawędzi czworoscianu połączyć w taki sposób, by otrzymać czworokąt płaski. Zbadać rodzaj tego czworokąta oraz długości jego boków.

7. Znaleźć punkt równoodległy od ścian czworoscianu.
[Wskazówka; jak rozwiązujemy analogiczne zagadnienie dla trójkąta?]

8. Znaleźć punkt równoodległy od wszystkich wierzchołków czworoscianu.

9. Jeżeli w dowolnej piramidzie punkt O jest jednakowo odległy od wszystkich krawędzi, wówczas spodki prostopadłych, poprowadzonych z O do ścian piramidy, są środkami kół, wpisanych w te ściany.

10. W każdym ostrosłupie suma pól ścian bocznych jest większa od pola podstawy.

11. Jeżeli w czworoscianie $ABCD$ wszystkie kliny, należące do naroża A , są proste, wówczas kwadrat pola ściany BCD równa się sumie kwadratów pól trzech pozostałych ścian.

[Porównaj z twierdzeniem Pitagorasa!]

12. W czworoscianie $ABCD$ dwie przeciwległe krawędzie AC , BD równają się sobie; to samo wiemy o dwóch innych przeciwległych krawędziach BC , AD . Czy czworoscian posiada równe ściany i równe kliny, i które mianowicie?

12a. Co można powiedzieć o czworoscianie, w którym każde dwie przeciwległe krawędzie równają się sobie?

13. Zbudować czworoscian, mając dane wszystkie jego krawędzie.

14. Zbudować ostrosłup o podstawie kwadratowej, mając daną krawędź podstawy i wysokość.

15. To samo pytanie, jeżeli mamy daną krawędź boczną i wysokość.

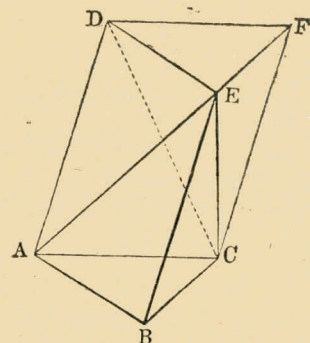
16. Zbudować siatkę czworoscianu, mając daną jego podstawę oraz kliny między podstawą i ścianami bocznymi.

17. Zbudować siatkę ostrosłupa prostego, mając daną jego podstawę i wysokość.

18. Czworoscian foremny o krawędzi = 5 cm. przecinamy płaszczyzną, równoległą do podstawy i poprowadzoną w takiej odległości od tej podstawy, że pole przekroju jest 9 razy mniejsze od pola podstawy. Zbudować siatkę pnia ostrosłupowego, który w ten sposób otrzymaliśmy.

19. Prostopadłościan o wymiarach danych (a , b , c) wydrążono tak, że zagłębienie, które powstało, ma kształt ostrosłupa prostego. Ostrosłup ten ma wspólną podstawę z prostopadłościanem, wysokość zaś dwa razy mniejszą od wysokości prostopadłościanu. Zbudować siatkę otrzymanej w ten sposób bryły.

20. Na rys. 327 wykazać, że graniastosłup o podstawie trójkątnej dają się podzielić na trzy piramidy, mające równe objętości.



Rys. 327.

21. Analogicznie do określenia § 218, str. 204, utworzyć określenie figur jednokładnych w przestrzeni.

22. Mając dany ostrosłup, zbudować ostrosłup jednokładny z nim względem jednego z jego wierzchołków.

23. Zbadać związki między elementami obu ostrosłupów (czy mają one równe kąty lub kliny? co można powiedzieć o wielkości ich krawędzi i ścian, jak również o kształcie ścian?)

24. Utworzyć określenie ostrosłupów (graniastosłupów) podobnych.

25. Obliczyć pole powierzchni bocznej i objętość czworościanu foremnego, mając daną krawędź jego $= a$.

26. To samo pytanie dla piramidy prostej o podstawie sześciokątnej foremnej. Krawędź podstawy $= a$, krawędź boczna $= b$,

27. W wierzchołku A kwadratu $ABCD$ wystawiamy prostopadłą do jego płaszczyzny i na prostopadłej odkładamy $AM = b$. Obliczyć pole powierzchni bocznej ostrosłupa $MABCD$, jeżeli $AB = a$.

28. W sześciu wpisujemy ostrosłup, łącząc środek podstawy górnej sześcianu ze środkami krawędzi podstawy dolnej. Obliczyć pole powierzchni bocznej i objętość ostrosłupa, jeżeli krawędź sześcianu $= a$.

29. Podstawą ostrosłupa jest romb, którego kąt ostry ma 60° . Obliczyć krawędź podstawy i krawędzie boczne, jeżeli wiemy, że objętość ostrosłupa $= v$, a wysokość $= h$.

30. Obliczyć pole powierzchni i objętość ostrosłupa, którego podstawę stanowi trójkąt foremny, a jedna ze ścian bocznych równa się podstawie i jest do niej prostopadła. Krawędź podstawy $= a$.

31. W ostrosłupie prostym o podstawie sześciokątnej foremnej krawędź boczna jest dwa razy większa od krawędzi podstawy. Objętość ostrosłupa $= v$. Obliczyć krawędź podstawy i wielkość kąta, pod którym krawędź boczna jest nachylona do podstawy.

32. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny o bokach a, b, a ; ściany boczne są nachylone do podstawy pod kątem 45° . Obliczyć objętość ostrosłupa.

33. Pień ostrosłupowy przecinamy płaszczyzną równoległą do podstaw. Znaleźć odległość tej płaszczyzny od mniejszej podstawy, jeżeli pole przekroju jest średnią arytmetyczną pól obu podstaw.

34. To samo pytanie, jeżeli pole przekroju jest średnią geometryczną pól obu podstaw.

35. Ostrosłup o wysokości h przecięto płaszczyzną, równoległą do podstawy. Pole przekroju równa się iloczynowi obu odcinków,

na które podzieliliśmy wysokość, pole zaś podstawy równa się iloczynowi z długości górnego odcinka przez długość całej wysokości. Obliczyć pola podstawy i przekroju.

36. Na trójkącie foremnym, jako na podstawie, budujemy ostrosłup prosty i graniastosłup o równych wysokościach. Jaki jest stosunek między wysokością tych brył a krawędzią ich wspólnej podstawy, jeżeli pola powierzchni bocznych obu brył mają się do siebie, jak $1:n$?

37. W jakich granicach może się zmieniać liczba n w poprzednim zadaniu? Jaką wartość na n otrzymamy, jeżeli ostrosłup jest czworościanem foremnym?

38. Rozwiązać zadanie 36 w założeniu, iż wspólną podstawą brył jest jakikolwiek wielokąt foremny i że znamy apotemę wielokąta $= a$.

39. Obliczyć pole powierzchni bocznej pnia ostrosłupowego o podstawie 1) trójkątnej foremnej, 2) kwadratowej, 3) ośmiokątnej foremnej, jeżeli wiadomo, że pień jest prosty, i jeżeli mamy daną wysokość jego h i krawędzie podstaw a i b .

40. W pniu ostrosłupowym prostym o podstawie kwadratowej krawędź podstawy górnej $= a$, pole powierzchni zupełnej $= S$, ściany zaś boczne są nachylone do podstawy pod kątem 30° . Obliczyć: 1) krawędź podstawy dolnej; 2) wysokość pnia; 3) wysokość piramidy, z której otrzymano ten pień.

41. W pniu prostym o podstawie trójkątnej foremnej krawędź boczna nachylona jest do podstawy pod kątem 45° . Obliczyć pole powierzchni i objętość pnia, jeżeli pola podstaw równają się odpowiednio a^2 i b^2 .

42. Objętość pnia $= v$, wysokość $= h$, krawędzie podstaw mają się do siebie, jak $m:n$. Obliczyć pola podstaw.

43. Obliczyć objętość pnia prostego o podstawie kwadratowej, jeżeli jego przekątna $= a$, krawędzie zaś podstaw równają się b i c .

44. W pniu ostrosłupowym prostym o podstawie trójkątnej foremnej wydrążono otwór w kształcie ostrosłupa, którego podstawą jest podstawa górna pnia, wierzchołek zaś leży w środku podstawy dolnej pnia. Obliczyć objętość pozostałej części pnia, jeżeli pola jego podstaw równają się a^2 i b^2 , wysokość zaś równa się h .

45. W pniu prostym o podstawie kwadratowej pola podstaw równają się a^2 i b^2 ; pole powierzchni bocznej równa się połowie pola powierzchni zupełnej. Obliczyć wysokość pnia.

46. Wysokość pnia prostego podzielono na trzy części równe i przez punkty podziału poprowadzono płaszczyzny, równoległe do podstaw. Obliczyć pola otrzymanych przekrojów, jeżeli pola podstaw równają się S i S' .

47. Pole podstawy ostrosłupa $= 100 \text{ cm}^2$, wysokość jego $= 6 \text{ cm}$. Na ile części należy podzielić jego wysokość, jeżeli chcemy, że-

by objętość wszystkich graniastosłupów wewnętrznych (zbudowanych tak, jak to uczyniliśmy w § 364), różniła się od objętości wszystkich graniastosłupów zewnętrznych mniej niż o 1 cm.^3 ? mniej niż o $0,1 \text{ cm.}^3$? mniej niż o $0,01 \text{ cm.}^3$?

48. To samo pytanie, jeżeli chodzi o różnicę między sumą objętości graniastosłupów zewnętrznych a liczbą stałą $\frac{Sh}{3}$, którą nazwalimy objętością piramidy.

C. O wielościanach foremnych.

§ 367. **Określenie.** *Wielościan nazywamy foremnym, jeżeli wszystkie jego ściany są wielokątami foremnymi równymi i jeżeli wszystkie naroża równają się sobie.*

Poznaliśmy już dwa wielościany foremne: sześciian i czworościan foremny. Powstaje pytanie: czy istnieją jeszcze inne wielościany foremne i ile ich jest?

Wiemy z planimetrii, że wielokąt foremny może mieć dowolnie wielką liczbę boków, tak iż możemy utworzyć nieograniczenie wiele rodzajów wielokątów foremných. Zdawałoby się, że to samo da się powiedzieć o wielościanach. Przekonamy się jednak zaraz, że wielościanów foremných istnieć może tylko pięć.

Jakoż z twierdzenia § 335 (str. 333) wiemy, że suma ścian naroża musi być mniejsza od 360° , jeśli więc wielościan ma być ograniczony przez trójkąty foremne, których każdy kąt ma 60° , to w każdym wierzchołku może schodzić się tylko 3, 4 albo 5 ścian, gdyż

$3 \cdot 60^\circ = 180^\circ < 360^\circ$, $4 \cdot 60^\circ = 240^\circ < 360^\circ$, $5 \cdot 60^\circ = 300^\circ < 360^\circ$, natomiast $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$.

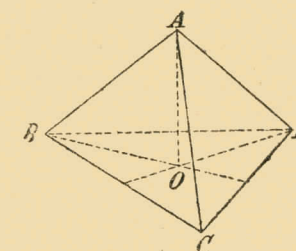
W taki sam sposób przekona się czytelnik, że jeśli wielościan ma być ograniczony przez kwadraty lub przez pięciokąty foremne, wówczas naroże nie może mieć więcej nad 3 ściany; może więc istnieć tylko jeden rodzaj wielościanów foremných o ścianach kwadratowych i jeden rodzaj o ścianach pięciokątnych foremných.

Kąt wewnętrzny sześciokąta foremnego ma 120° , ponieważ zaś $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$, a naroże musi mieć conajmniej trzy ściany, zatem niepodobna utworzyć wielościanu foremnego, ograniczonego przez sześciokąty foremne.

§ 368. Ustaliliśmy, że nie może istnieć więcej niż pięć rodzajów wielościanów foremných. Teraz przekonamy się, że wszystkie one naprawdę istnieją, a mianowicie pokażemy, w jaki sposób można je zbudować.

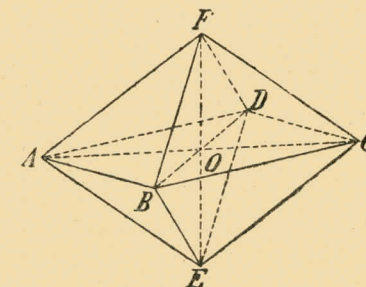
1. Aby zbudować czworościan foremny, wykreślamy najpierw trójkąt foremny $\triangle BCD$, w jego środku O wystawiamy prostopadłą OA do płaszczyzny trójkąta, wreszcie z punktu B w płaszczyźnie AOB kreślimy koło promieniem, równającym się BC .

Ponieważ $OB < BC$, zatem koło przetnie prostopadłą w jakimś punkcie A . Figura $ABCD$ jest żadaną (dlaczego?)



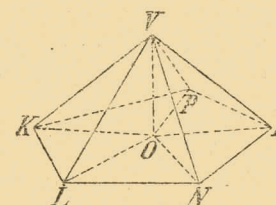
Rys. 328.

2. W środku O kwadratu $ABCD$ wystawiamy prostopadłą do jego płaszczyzny i na niej po obu stronach płaszczyzny odkładamy odcinki $OE = OF = OA$. Bryła, wyznaczona przez punkty A, B, C, D, E, F jest żadanym ośmiościanem foremnym.

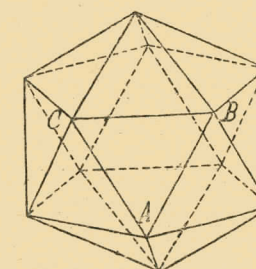


Rys. 329.

3. Kreślimy najpierw pięciokąt foremny $KLNRP$, w środku O wielokąta wystawiamy prostopadłą do jego płaszczyzny i w płaszczyźnie KOV kreślimy z punktu K koło promieniem, równającym się bokowi pięciokąta. W ten sposób budujemy kąt bryłowy $V(KLNRP)$, w którym każda ściana ma 60° .



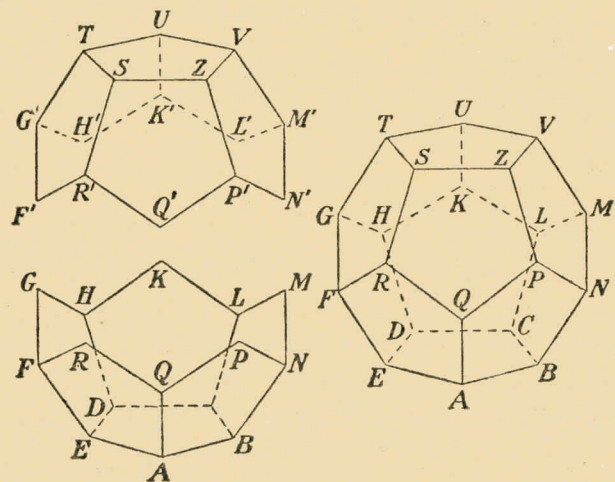
Rys. 330.



Rys. 331.

Jeśli teraz w powyższy sposób przy każdym wierzchołku trójkąta foremnego $\triangle ABC$ zbudujemy naroże o pięciu ścianach, mających po 60° , przyczem każda krawędź równać się będzie AB , otrzymamy powierzchnię wypukłą, złożoną z 10 równych trójkątów foremnych i z jednej strony otwartą. Budując drugą taką samą powierzchnię i zestawiając je wolnymi brzegami, otrzymamy dwudziestościan foremny.

4. Sześciścian uczeń zbuduje sam.



Rys. 332.

5. Do pięciokąta foremnego $ABCDE$ przystawiamy pięć równych mu pięciokątów tak, by przy każdym wierzchołku utworzyło się naroże o trzech ścianach. Otrzymujemy powierzchnię wypukłą, złożoną z sześciu foremnych i równych pięciokątów i z jednej strony otwartą. Budując drugą taką samą powierzchnię i zestawiając je wolnymi brzegami, otrzymamy dwunastościan foremny.

Ćwiczenia I.VII. 1. Jeżeli środki wszystkich ścian sześciścianu połączymy prostymi, otrzymamy ośmiościan foremny, wpisany w sześciścian.

2. Jeżeli środki ścian ośmiościanu foremnego połączymy prostymi, otrzymamy sześciścian, wpisany w ośmiościan.

3. Jeżeli na każdej parze przeciwległych ścian sześciścianu wykreślimy po jednej przekątnej tak, by były one względem siebie skośne, otrzymamy czworościan foremny, wpisany w sześciścian.

4. Jeżeli w ośmiościanie foremnym przedłużymy cztery ściany, z których żadne dwie nie mają wspólnej krawędzi, otrzymamy czworościan foremny, opisany na ośmiościanie.

5. Zbudować siatkę ośmiościanu foremnego.

6. To samo dla dwudziestościanu.

7. To samo dla dwunastościanu.

8. Mając daną krawędź sześciścianu, zbudować krawędź ośmiościanu foremnego, wpisanego w ten sześciścian.

Ćwiczenia 9 — 14 uczeń winien przerobić na modelach, przez siebie zbudowanych.

9. Jeżeli w sześciścianie materialnym połączymy środki O , O' dwóch przeciwległych ścian i obracać będziemy sześciścian dookoła osi OO' , wówczas w ciągu obrotu zupełnego sześciścian 4 razy zajmować będzie to samo położenie.

Prostą OO' nazywamy *poczwórną osią symetrii* sześciścianu. Ile poczwórnych osi symetrii można odnaleźć w sześciścianie?

10. Odszukać w sześciścianie wszystkie osie symetrii potrójne i podwójne.

11. Wykazać, że wszystkie osie symetrii sześciścianu przecinają się w jednym punkcie, który jest *środkiem symetrii* tej bryły.

Określenie. Jeżeli punkty A , A' tak są położone względem płaszczyzny α , iż dzieli ona na połowy odcinek AA' i jest do niego prostopadła, wówczas powiemy, że α jest *płaszczyzną symetrii* dla punktów A i A' .

Jeżeli figurę F możemy jakąś płaszczyzną α podzielić na połowy w ten sposób, że każdemu punktowi jednej połowy odpowiada symetryczny (względem płaszczyzny α) punkt drugiej połowy, wówczas powiemy, że α jest *płaszczyzną symetrii danej figury F*.

12. Odnaleźć w sześciścianie wszystkie płaszczyzny symetrii. Porównać przecięcia się tych płaszczyzn z osiami sześciścianu.

13. Wykazać, że wszystkie osie symetrii sześciścianu są osiami takiego samego rzędu w ośmiościanie foremnym wpisanym.

14. Odnaleźć osie symetrii czworościanu foremnego i porównać je z osiami symetrii sześciścianu, opisanego na czworościanie.

KSIEGA VII.

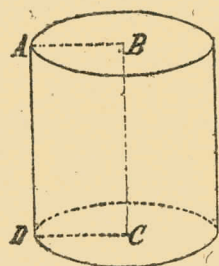
Bryły obrotowe.

A. Walec obrotowy.

§ 369. Jeżeli ze wszystkich punktów okręgu wystawimy prostopadłe do jego płaszczyzny, utworzą one powierzchnię, zwaną *powierzchnią walcową*. Prostopadła, wystawiona w środku okręgu, nazywa się *osią walca*.

Powierzchnia walcowa jest miejscem geometrycznym punktów (w przestrzeni) równoodległych od osi.

W geometrii szkolnej poprzestajemy zwykle na rozważaniu pewnej części tej powierzchni. Jeżeli mianowicie przetniemy powierzchnię walcową dwiema płaszczyznami, prostopadłymi do osi, otrzymamy bryłę, zwaną *walcem* (ograniczonym).



Rys. 333.

Jeżeli prostokąt materialny $ABCD$ obracać będziemy dokoła boku BC , wówczas bok przeciwległy AD zakreśli powierzchnię walca (ograniczonego), a cały prostokąt zakreśli walec. Z tego powodu walec nazywamy bryłą obrotową.

Odcinek AD i wszystkie równoległe do niego odcinki, leżące na powierzchni walca, nazywamy *tworzącymi walca*.

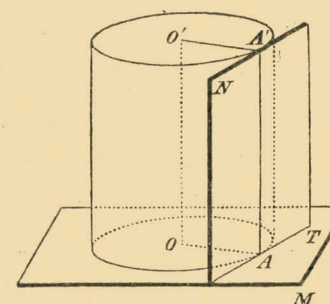
Odcinek AB i wszystkie równe mu odcinki, poprowadzone z dowolnego punktu powierzchni walca prostopadłe do osi, nazywamy *promieniami walca*.

Punkt X nazywamy punktem wewnętrznym walca, jeżeli odległość jego od osi jest mniejsza od promienia walca, jeżeli zaś odległość ta jest większa od promienia, punkt X zwie się zewnętrznym.

§ 370. Twierdzenie. Płaszczyzna, równoległa do osi walca, ma z jego powierzchnią albo dwie tworzące wspólne, albo jedną, albo wreszcie nie ma z nią wcale punktów wspólnych zależnie od tego, czy odległość tej płaszczyzny od osi jest mniejsza od promienia walca, równa promieniowi czy też większa od promienia.

W pierwszym przypadku, gdy odległość płaszczyzny α od osi jest mniejsza od promienia, przetnijmy całą figurę nową płaszczyzną β prostopadłą do osi. W przekroju otrzymamy koło (którego środek leży na osi) przecięte prostą $[\alpha\beta]$, stanowiącą krawędź tych dwu płaszczyzn. Jeżeli w punktach przecięcia okręgu z prostą $[\alpha\beta]$ wystawimy prostopadłe do płaszczyzny β dwie te proste, będące tworzącymi walca, muszą leżeć zarazem na płaszczyźnie α (dlaczego?)

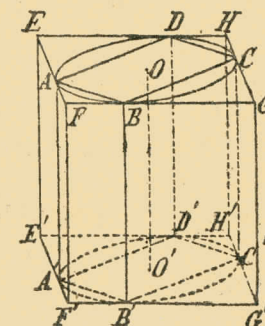
Uczeń dowiedzie sam twierdzenia dla dwu drugich przypadków posługując się rys. 334.



Rys. 334.

§ 371. W jedną z podstaw walca wpiszmy dowolny wielokąt (np. czworobok $ABCD$ na rys. 335) i przez wierzchołki jego poprowadźmy tworzące. Utworzy się wówczas na drugiej podstawie równy mu wielokąt ($A'B'C'D'$ na rys. 335), wpisany w tę podstawę. Otrzymamy zarazem graniastosłup, zwany wpisanym w walec.

Analogicznie, zbudujmy wielokąt, opisany na podstawie walca, i przez jego boki przesunijmy płaszczyzny, styczne do powierzchni walca. Na płaszczyźnie drugiej podstawy walca otrzymamy



Rys. 335.

wielokąt, równający się pierwszemu (dlaczego?) i opisany na tej drugiej podstawie, a zarazem otrzymamy graniastosłup, który nazywać będziemy opisanym na walcu.

§ 372. Pojęcie pola powierzchni walca i objętości walca utworzymy w sposób analogiczny do pojęcia pola koła.

Wyobraźmy sobie mianowicie, iż opisaliśmy na walcu i wpisaliśmy w niego dwa graniastosłupy o podstawach foremnych. Niech podstawy ich mają po n boków. Oznaczmy pola tych podstaw przez S_n i s_n , obwody ich przez P_n i p_n , wysokość zaś graniastosłupów (i walca) przez h .

Podwajajmy stopniowo liczbę ścian tych graniastosłupów.

Pola powierzchni bocznych graniastosłupów opisanych tworzą ciąg liczb nieskończony malejący

$$P_n h, P_{2n} h, P_{4n} h, \dots \quad (1)$$

pola zaś powierzchni bocznych graniastosłupów wpisanych tworzą ciąg liczb nieskończony rosnący

$$p_n h, p_{2n} h, p_{4n} h, \dots \quad (2)$$

przyczym jednak wszystkie wyrazy pierwszego ciągu pozostają większe od wyrazów drugiego ciągu (dlaczego?).

Zauważmy jeszcze, iż różnica między odpowiednimi wyrazami obu ciągów nieograniczenie maleje, gdyż

$$P_k h - p_k h = h(P_k - p_k),$$

przyczym h jest liczbą stałą, różnica zaś $P_k - p_k$ maleje nieograniczenie (§ 296, (3), str. 299).

Wobec tego istnieje jedna i tylko jedna liczba, większa od wszystkich wyrazów drugiego ciągu, lecz mniejsza od wszystkich wyrazów pierwszego ciągu.

Liczbę tę nazywamy polem powierzchni bocznej walca.

Jest to określenie tego pola.

Tak samo objętości graniastosłupów opisanych i wpisanych tworzą dwa ciągi nieskończone

$$S_n h, S_{2n} h, S_{4n} h, \dots \quad (1')$$

$$s_n h, s_{2n} h, s_{4n} h, \dots \quad (2')$$

co do których uczeń dowiedzie, że 1) pierwszy maleje, drugi rośnie; 2) wyrazy pierwszego pozostają większe od wyrazów

drugiego; 3) różnica między odpowiednimi wyrazami obu ciągów maleje nieograniczenie.

Istnieje więc znów jedna i tylko jedna liczba mniejsza od wyrazów pierwszego ciągu, lecz większa od wyrazów drugiego.

Liczbę tę nazywamy objętością walca.

§ 373. Twierdzenie. Pole powierzchni bocznej walca równa się iloczynowi z obwodu jego podstawy przez długość wysokości.

Istotnie, jeżeli promień walca oznaczmy przez r , wówczas liczba

$$2\pi r h$$

jest większa od wszystkich liczb $p_k h$ ciągu (2), lecz mniejsza od wszystkich liczb $P_k h$ ciągu (1), a więc — zgodnie z naszym określeniem — jest polem powierzchni bocznej walca.

§ 374. W podobny sposób uczeń dowiedzie sam następującego twierdzenia.

Twierdzenie. Objętość walca równa się iloczynowi z pola jego podstawy przez długość wysokości czyli równa się $\pi r^2 h$, gdzie r oznacza promień walca.

Ćwiczenia LVIII. 1. Płaszczyzna porusza się tak, że pozostaje wciąż równoległą do danej prostej i ma od niej zawsze stałą odległość. Znaleźć figurę, do której ta płaszczyzna pozostaje przy swym ruchu styczną.

2. Przekroje walca równoległe do osi mają równe pola, jeżeli są równoodległe od osi, i odwrotnie.

3. Każde dwie płaszczyzny styczne do walca albo są do siebie równoległe, albo też przecinają się według krawędzi, równoległej do osi walca.

4. Poprowadzić płaszczyznę, styczną do danego walca według danej tworzącej.

5. Poprowadzić do walca płaszczyznę styczną, która byłaby równoległa (lub prostopadła) do danej płaszczyzny.

Warunki możliwości zadania.

6. Czy na każdym graniastosłupie o podstawie czworokątnej można opisać walec i czy w każdy taki graniastosłup można wpisać walec?

7. W prostopadłościan o podstawie kwadratowej wpisano walec, który przecięto następnie płaszczyzną, równoległą do osi i odległą od niej o połowę promienia. Zbudować (planimetrycznie) ten przekrój, mając dane wymiary prostopadłościanu.

8. W dany klin wpisać powierzchnię walcową nieograniczoną tak, by przechodziła ona przez punkt A , dany wewnątrz klina.

9. Do dwóch walców, których podstawy dolne leżą na jednej płaszczyźnie, poprowadzić wspólną płaszczyznę styczną.

10. Zbudować walec jednokładny z danym względem punktu J , leżącego na osi. Promienie walców mają być proporcjonalne do dwóch danych odcinków m i k .

11. To samo zadanie, jeżeli punkt J leży na powierzchni walca.

12. Przez dany punkt A wewnątrz walca poprowadzić płaszczyznę, którąby przecięła walec według dwóch tworzących możliwie bliskich do siebie.

13. Obliczyć pole powierzchni i objętość walca, opisanego na sześciennie o krawędzi $= a$.

14. Jaki musi być stosunek wysokości walca do promienia, żeby pole jego przekroju osiowego (t. j. wyznaczonego przez płaszczyznę, na której leży oś walca) równało się polu podstawy?

15. Walec przecięto płaszczyzną równoległą do osi. Przekątna przekroju $= a$, pole przekroju $= m^2$, odległość przekroju od osi $= k$. Obliczyć promień i wysokość walca.

16. Objętość brył, utworzonych przez obrót prostokąta dokoła dwóch sąsiednich boków, równają się v i v' . Obliczyć przekątną prostokąta.

17. Walec opisano na sześciennie tak, iż osią jego jest przekątna sześciannu. Obliczyć pole powierzchni bocznej walca, mając dane pole przekroju przekątnego m^2 .

18. W ostrosłup prosty o podstawie kwadratowej wpisano walec tak, że dolna jego podstawa leży na podstawie ostrosłupa, górna zaś dotyka jego ścian bocznych. Obliczyć wysokość walca, jeżeli każda krawędź ostrosłupa $= a$, objętość zaś walca jest m razy mniejsza od objętości ostrosłupa.

19. Mając dane objętości v , v' dwóch walców o równych wysokościach, znaleźć objętość walca, mającego tę samą wysokość i pole powierzchni bocznej równające się sumie pól powierzchni bocznych danych walców.

B. Stożek obrotowy.

§ 375. Jeżeli wszystkie punkty okręgu połączymy liniami prostymi z dowolnym punktem O , nie leżącym w płaszczyźnie tego okręgu, otrzymamy powierzchnię, zwaną *powierzchnią stożkową kołową* (nieograniczoną). Proste, o których mowa, nazywamy *tworzącymi stożka*; punkt O nazywa się *wierzchołkiem stożka*.

Jeżeli prostopadła, poprowadzona z wierzchołka do płaszczyzny okręgu, przechodzi przez środek tego okręgu, wówczas

stożek nazywamy *prostym* albo *obrotowym*. Prostopadła nazywa się wówczas *osią stożka*.

Wierzchołek dzieli na dwie części każdą tworzącą powierzchnię stożkowej, a więc dzieli również całą powierzchnię na dwie części zwane *powłokami stożka* (rys. 336).

W zagadnieniach elementarnych poprzestajemy zwykle na rozważaniu pewnej części powierzchni stożkowej. Jeżeli mianowicie wszystkie punkty okręgu koła połączymy odcinkami z punktem, nie leżącym w płaszczyźnie okręgu, otrzymamy część jednej powłoki powierzchni stożkowej. Tę właśnie część mamy zwykle na myśli, gdy w geometrii elementarnej mówimy o powierzchni stożka.

Jeżeli trójkąt prostokątny materialny obracać będziemy dokoła jednej z przyprostokątnych, wówczas przeciwprostokątna zakreśli powierzchnię stożka prostego kołowego (ograniczonego). Ztego właśnie powodu stożek taki nazywają również *obrotowym*.

Płaszczyzna, przesunięta przez oś stożka prostego, przechodzi przez dwie jego tworzące, albo inaczej: przecina powierzchnię stożka według dwóch tworzących (dlaczego?); kąt między tymi tworzącymi nazywamy *kątem rozwarcia stożka* (np: $\angle AVB$ na rys. 336).

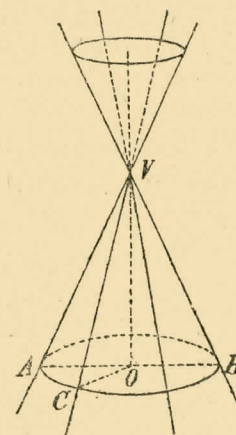
§ 376. Twierdzenie. Jeżeli stożek obrotowy przetniemy dowolną płaszczyzną prostopadłą do osi, otrzymamy w przekroju koło, którego środek leży na osi stożka.

Przedewszystkim zauważmy, że płaszczyzna ta przecina wszystkie tworzące stożka, gdyż kąt rozwarcia stożka musi być mniejszy od 180° .

Niech na rys. 336 punkt V będzie wierzchołkiem stożka. Trójkąty prostokątne $\triangle AOV$, $\triangle COV$, $\triangle BOV$ równają się sobie (dlaczego?), zatem

$$OA = OB = OC.$$

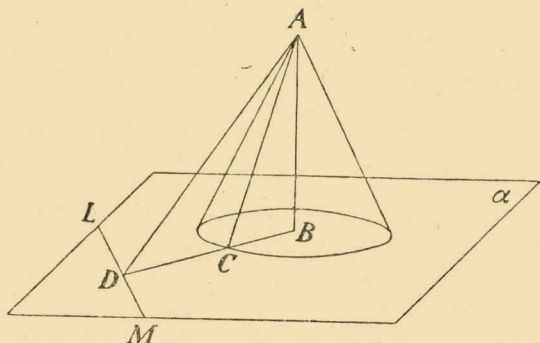
§ 377. Twierdzenie. Płaszczyzna, przechodząca przez wierzchołek stożka, przecina go według dwóch tworzących, albo ma z nim jedną tworzącą wspólną (i wtedy na-



Rys. 336.

zywa się płaszczyzną styczną), albo wreszcie nie ma z powierzchnią stożka żadnych innych punktów wspólnych, zależnie od tego, czy kąt między płaszczyzną a osią stożka jest mniejszy, równy czy większy od połowy kąta rozwarcia stożka.

Dowód przeprowadzi uczeń sam, kierując się rysunkiem 337.



Rys. 337.

§ 378. Pojęcie pola powierzchni i objętość stożka ustalimy w taki sam sposób, jak to uczyniliśmy dla walca

Jeżeli w koło, stanowiące podstawę stożka, wpisujemy dowolny wielokąt i wierzchołki jego połączymy z wierzchołkiem stożka, otrzymamy ostrosłup, wpisany w stożek. Tak samo, jeżeli na podstawie stożka opiszemy dowolny wielokąt i wierzchołki jego połączymy z wierzchołkiem stożka, otrzymamy ostrosłup opisany na stożku.

Wyobraźmy sobie, że wpisaliśmy w stożek i opisaliśmy na nim ostrosłupy, mające za podstawy wielokąty foremne o n bokach i że stopniowo podwajamy liczbę ścian ostrosłupów.

Utwórzmy dwa ciągi nieskończone liczb, będących objętościami tych ostrosłupów

$$\frac{1}{3} s_n h, \quad \frac{1}{3} s_{2n} h, \quad \frac{1}{3} s_{4n} h, \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} S_n h, \quad \frac{1}{3} S_{2n} h, \quad \frac{1}{3} S_{4n} h, \quad \dots \quad (2)$$

Wyrazy pierwszego ciągu rosną, drugiego — maleją, przy czym jednak wyrazy pierwszego ciągu pozostają zawsze mniejsze od wyrazów drugiego ciągu (dlaczego?). Zauważmy

jeszcze, że różnicę między wyrazami obu ciągów możemy uczynić dowolnie małą, gdyż równa się ona

$$\frac{1}{3} S_k h - \frac{1}{3} s_k h = \frac{1}{3} h(S_k - s_k),$$

a więc składa się z dwóch czynników, z których pierwszy $\frac{1}{3} h$ jest liczbą stałą, drugi zaś $S_k - s_k$ może być uczyniony

dowolnie małym przez dobranie w odpowiedni sposób liczby k .

Wynika stąd, że istnieje jedna i tylko jedna liczba, większa od wszystkich wyrazów ciągu (1), a zarazem mniejsza od wszystkich wyrazów ciągu (2). Liczbę tę nazywamy *objętością stożka*.

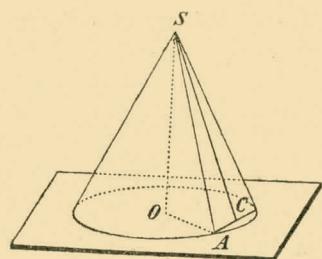
Łatwo przekonać się możemy, że *objętość stożka równa się* $\frac{\pi r^2 h}{3}$, gdzie r oznacza promień podstawy stożka, h zaś jego wysokość.

Istotnie, liczba ta jest większa od wyrazów ciągu (1), lecz mniejsza od wyrazów ciągu (2) (dlaczego?), że zaś istnieje tylko jedna liczba, czyniąca zadość temu warunkowi, zatym liczba $\frac{\pi r^2 h}{3}$ jest rzeczywiście tym, co nazwaliśmy *objętością stożka*.

§ 379. Chcąc utworzyć pojęcie pola powierzchni stożkowej, zauważmy przedewszystkim, że jeśli w dane koło wpisujemy wielokąt foremny i będziemy podwajali liczbę jego boków, wówczas długość każdego boku wielokąta maleć będzie nieograniczenie.

Istotnie, gdyby tak nie było, gdyby np. bok wielokąta wpisanego nie mógł nigdy stać się mniejszy od jakiegoś stałego odcinka ϵ , wówczas przy nieograniczonym zwiększaniu liczby boków obwód wielokąta byłby zawsze większy od $n\epsilon$, a więc przy ustawicznym zwiększaniu liczby n musiałby rosnąć bez granic, wiemy zaś, że tak nie jest, że obwód ten pozostaje zawsze mniejszy od obwodu jakiegokolwiek wielokąta opisanego.

Dalej zauważmy, że jeśli w stożek wpisaliśmy ostrosłup o podstawie foremnej, wówczas różnica między jego krawędzią boczną (która jest zarazem tworzącą stożka) a apotemą



Rys. 338.

jest mniejsza od połowy boku podstawy, t. j. (rys. 338)

$$SA - SC < AC.$$

Możemy tedy przez podwajanie liczby ścian takiego ostrosłupa osiągnąć to, iż apotema jego dowolnie mało różnić się będzie od tworzącej stożka.

§ 380. Teraz postąpmy, jak poprzednio, t. j. wpiszmy w stożek ostrosłup o podstawie foremnej i opiszmy na nim drugi ostrosłup o podstawie podobnej, następnie zaś podwajamy wciąż liczbę ścian bocznych obu ostrosłupów. Otrzymamy w ten sposób dwa nieskończone ciągi liczb, będących polami powierzchni bocznych tych brył:

$$p_n a_n, p_{2n} a_{2n}, p_{4n} a_{4n}, \dots \quad (1)$$

$$P_n l, P_{2n} l, P_{4n} l, \dots \quad (2),$$

gdzie p_n, P_n oznaczają połowy obwodów podstaw, a_n oznacza apotemę ostrosłupa wpisanego, l zaś oznacza tworzącą stożka, która jest zarazem apotemą ostrosłupa opisanego.

Wyrazy drugiego ciągu stale maleją (dlaczego?), wyrazy zaś pierwszego ciągu stale rosną, gdyż rośnie zarówno czynnik p_n , jak i czynnik a_n . Niemniej jednak wyrazy ciągu (1) pozostają mniejsze od wyrazów ciągu (2), różnica zaś między nimi

$$P_k l - p_k a_k$$

może być uczyniona dowolnie małą przez powiększenie liczby k .*)

*) Istotnie, niech będzie $l - a_k = u_k$ czyli $a_k = l - u_k$. Wobec tego mamy

$$P_k l - p_k a_k = P_k l - p_k (l - u_k) = (P_k - p_k) l + p_k u_k.$$

Otóż prawa część tej równości maleje nieograniczenie, gdyż pierwszy składnik $(P_k - p_k) l$ maleje nieograniczenie (dlaczego?), co się zaś tyczy drugiego składnika $p_k u_k$, to jakkolwiek czynnik p_k rośnie, pozostaje on jednak mniejszy od stałej liczby P_3 , drugi zaś czynnik u_k maleje nieograniczenie, gdyż wyraża różnicę między tworzącą l i apotemą a_k .

Mamy tedy prawo twierdzić, że istnieje jedna i tylko jedna liczba, większa od wszystkich wyrazów ciągu (1), lecz mniejsza od wyrazów ciągu (2).

Liczbę tę nazywamy *pojemnością powierzchni stożka*. Równa się ona

$$\pi l,$$

gdyż liczba πl jest większa od wyrazów ciągu (1), a zarazem mniejsza od wyrazów ciągu (2) (dlaczego?).

§ 381. Uczeń dowiedzie sam następujących trzech twierdzeń:

Twierdzenie. Jeżeli stożek przetniemy płaszczyznami prostopadłymi do osi, wówczas pola przekrojów będą się miały do siebie tak, jak kwadraty ich odległości od wierzchołka.

§ 382. Stożkiem ściętym albo pniem stożkowym nazywamy część stożka, zawartą między jego podstawą a jakimkolwiek przekrojem równoległym do podstawy. Odległość między dwiema podstawami pnia nazywamy jego *wysokością*.

Twierdzenie. Objętość pnia stożkowego wyraża się wzorem

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr),$$

w którym przez h oznaczyliśmy wysokość pnia, przez R i r promienie obu jego podstaw.

§ 383. **Twierdzenie.** Pole powierzchni bocznej pnia stożkowego wyraża się wzorem

$$\pi l (R + r),$$

w którym przez l oznaczyliśmy tworzącą pnia.

Ćwiczenie LIX. 1. Jeżeli mamy dane dwa nierówne koła, leżące na dwóch równoległych płaszczyznach, wówczas proste, łączące końce promieni, równoległych do siebie i mających jednakowe zwroty, przecinają się w jednym punkcie.

Czy zajdzie jaka zmiana w twierdzeniu, jeżeli równoległe promienie będą miały zwroty przeciwne?

2. Płaszczyzna α , przechodząca przez wierzchołek stożka, przecina go według trójkąta $\triangle AOB$. Przesunąć przez wierzchołek drugą płaszczyznę tak, by otrzymać w przekroju trójkąt, równający się trójkątowi $\triangle AOB$.

3. Czy w każdy ostrosłup prosty można wpisać stożek i czy na każdym ostrosłupie prostym można opisać stożek?

4. Jeżeli płaszczyzna α jest styczna do stożka, wówczas przecinając figurę dowolną płaszczyzną β , prostopadłą do osi, otrzymamy koło, do którego prosta $[\alpha\beta]$ jest styczna.
5. Osie dwóch stożków nieskończonych leżą na jednej prostej, wierzchołki ich zaś nie zlewają się. Czy stożki przecinają się? Jeżeli tak, to jaki kształt ma linia przecięcia?
6. Stożek i walec mają wspólną oś; jaki kształt ma linia przecięcia się obu figur?
7. Przez dany punkt poprowadzić płaszczyznę styczną do danego stożka. Ile rozwiązań?
8. Poprowadzić płaszczyznę, styczną do danego stożka i prostopadłą (lub równoległą) do drugiej danej płaszczyzny.
9. Przez dany punkt poprowadzić płaszczyznę, przecinającą dany stożek według dwóch tworzących tak, że kąt między tymi tworzącymi równa się danemu kątowi α .
10. Dane są dwa stożki, których podstawy leżą na jednej płaszczyźnie. Czy zawsze można poprowadzić płaszczyznę, styczną do obu stożków i w jaki sposób uczynić to?
11. Zbudować stożek (ograniczony), mając dany jego wierzchołek O , punkt A , o którym wiadomo, że leży na okręgu podstawy, oraz punkty B, C , o których wiadomo, że mają leżeć na powierzchni stożka, jeżeli przytym żadne dwa z pośród punktów A, B, C , nie leżą na jednej prostej z punktem O .
12. Zbudować stożek nieograniczony, mając dany jego wierzchołek O , oś oraz punkt A na powierzchni stożkowej.
13. Dane są dwa koła współśrodkowe, zakreślone promieniami r i $2r$. Po jednej stronie ich płaszczyzny zbudowano na nich dwa stożki, przyczym stożek na mniejszym kole ma wysokość $= 2h$, stożek zaś na większym kole zbudowany ma wysokość $= h$. Zbudować linję, według której przecinają się stożki.
14. Dwa stożki, mające wspólną wysokość, tak są położone, że wierzchołek jednego leży w środku podstawy drugiego. Mając daną wysokość h i promienie r i r' obu stożków, wykreślić linję, według której przecinają się stożki, oraz zbudować figurę, której obrót dookoła osi stożków mógłby zakreślić część spólną obu tych brył.
15. Mając dany stożek o promieniu podstawy $= r$ i wysokości $= h$, zbudować stożek jednokładny z nim i mający wysokość $= 2h$, jeżeli środek jednokładności J leży:
 - a) w wierzchołku danego stożka;
 - b) na jego powierzchni bocznej;
 - c) w dowolnym punkcie wewnętrznym lub zewnętrznym.
16. Gdzie należy poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do osi stożka, żeby podzielić na połowy: 1) jego objętość; 2) jego powierzchnię boczną?
17. Obliczyć boki trójkąta prostokątnego równoramiennego, którego obrót dookoła przyprostokątnej zakreśla stożek o objętości danej v .

18. To samo pytanie dla trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$ o kącie $\angle A = 30^\circ$, jeżeli przyprostokątna AC jest osią obrotu.

19. Obliczyć pole powierzchni i objętość bryły, którą zakreśla trójkąt równoramienny $\triangle ABC$, obracając się dookoła jednego z równych boków. Dane są: $a=b=12,5$ cm., $\angle A=30^\circ$; obliczenie przeprowadzić z dokładnością do 1.

20. Boki trójkąta równają się a, b, c . Obracamy trójkąt dookoła największego boku a . Obliczyć pole powierzchni i objętość bryły, zakreślonej przez obrót trójkąta.

21. Znaleźć pole powierzchni i objętość stożka, wpisanego w czworościan o krawędzi $= a$.

22. Obliczyć w zadaniu 19 objętości trzech brył, utworzonych przez obrót trójkąta kolejno dookoła boków a, b, c . Jaki związek zachodzi między tymi objętościami?

23. Na kole (O) r zbudowano walec o wysokości h i wydrążono w nim zagłębienie w kształcie stożka, którego wysokość $= \frac{1}{2} h$. Przecinamy tę bryłę płaszczyzną, równoległą do podstawy i dzielącą wysokość stożka w stosunku $1:3$. Obliczyć pole przekroju.

24. Jaka zależność zachodzi między tworzącą stożka i promieniem jego podstawy, jeżeli pole powierzchni bocznej jest średnią geometryczną między polem podstawy a polem powierzchni zupełnej.

25. Obliczyć promień górnej podstawy pnia stożkowego, jeżeli objętość jego $= v$, wysokość $= h$, promień podstawy dolnej $= r$.

26. W pniu stożkowym wydrążono zagłębienie w kształcie stożka, którego podstawą jest górna podstawa pnia, wierzchołek zaś leży w środku podstawy dolnej. Wskutek tego objętość pnia zmniejszyła się m razy. Znaleźć zależność między promieniami podstaw pnia.

27. Obliczyć pole powierzchni bocznej pnia stożkowego, jeżeli tworząca jego jest nachylona do podstawy pod kątem 60° , a pola obu podstaw równają się S i s .

28. Obliczyć pole powierzchni bocznej pnia stożkowego, jeżeli wiadomo, że pole jego przekroju osiowego $= S$, a tworząca nachylona jest do podstawy pod kątem 45° .

29. Wysokość pnia podzielono na n równych części i przez punkty podziału przesunięto płaszczyzny równoległe do podstaw. Wykazać, iż zarówno promienie przekrojów, jak pola warstw, na które podzieliliśmy powierzchnię boczną pnia, tworzą postęp arytmetyczny.

30. Jeżeli tworząca pnia stożkowego równa się sumie promieni podstaw, wówczas wysokość pnia jest dwa razy większa od średniej geometrycznej tych promieni, objętość zaś pnia równa się polu powierzchni zupełnej, pomnożonemu przez szóstą część wysokości.

31. Objętości dwu brył, które zakreśla równoległobok, gdy obracamy go kolejno dookoła dwóch boków, są odwrotnie proporcjonalne do tych boków.

32. Stożek przecięto za pomocą n płaszczyzn, równoległych do podstawy i dzielących wysokość stożka na n równych części. Na tych

przekrojach zbudowano walce tak, jak w § 364 budowaliśmy graniastosłupy. Wzorując się rozumowaniu § 364, 365 utworzyć nowe określenie objętości stożka, otrzymać wzór na tę objętość i wykazać, że to nowe określenie jest zgodne z określeniem, podanym w tekście (§ 378, str. 374).

C. O kuli.

§ 384. Określenie. *Miejsce geometryczne punktów przestrzeni, jednakowo odległych od stałego punktu O , nazywamy powierzchnią kulistą.*

Punkt O nazywa się *środkiem kuli*.

Odcinek, łączący środek z dowolnym punktem powierzchni kulistej, nazywa się *promieniem kuli*.

Punkt nazywamy *wewnętrznym* lub *zewnętrznym* zależnie od tego, czy odległość jego od środka jest mniejsza czy większa od promienia kuli.

Kulą nazywamy zbiór wszystkich punktów, położonych bądź to na powierzchni kulistej, bądź wewnątrz kuli.

Często zamiast „powierzchnia kulista” mówimy „kula”, jeżeli to nie może wywołać nieporozumienia.

§ 385. Twierdzenie. *Jeżeli odległość między płaszczyzną α a środkiem kuli jest mniejsza od promienia, wówczas płaszczyzna przecina powierzchnię kulistą według okręgu koła.*

Rozróżniamy dwa przypadki: 1) gdy płaszczyzna przechodzi przez środek kuli, 2) gdy płaszczyzna nie przechodzi przez środek kuli.

I. W pierwszym przypadku dowód jest niemal oczywisty. Zgodnie z określeniem powierzchni kulistej, wszystkie punkty tej powierzchni, jakie tylko znajdują się na płaszczyźnie α , tworzą okrąg koła, gdyż ten jest miejscem punktów na płaszczyźnie równoodległych od stałego punktu O .

Tym stałym punktem jest w danym razie środek kuli. Tak więc śladem przecięcia się płaszczyzny α z powierzchnią kulistą jest okrąg koła, którego promień równa się promieniowi kuli.

Okrąg taki nazywamy *kołem wielkim na kuli*.

II. W przypadku drugim prowadzimy promień kuli prostopadły do płaszczyzny α , który przebija tę płaszczyznę, powiedzmy, w punkcie A (rys. 339).

Przesuńmy trzy jakiekolwiek płaszczyzny przez ten promień. Przecinają one płaszczyznę α według trzech prostych AB , AD , AC , powierzchnię zaś kulistą według trzech okręgów.

Proste te muszą, oczywiście, przeciąć się z okręgami (dlaczego?) Niech D , B , C będą trzema z pośród tych punktów przecięcia (rys. 339). Odcinki AD , AB , AC równają się sobie (dlaczego?), zatem twierdzenie zostało dowiedzione.

Okrąg taki, jak DBC na rys. 339, nazywa się *kołem małym na kuli*.

§ 386. Uczeń sam dowiedzie, że płaszczyzna i powierzchnia kulista mają jeden punkt spólny (są do siebie styczne), lub nie mają wcale punktów spólnych zależnie od tego, czy odległość płaszczyzny od środka kuli równa się promieniowi czy też jest od promienia większa.

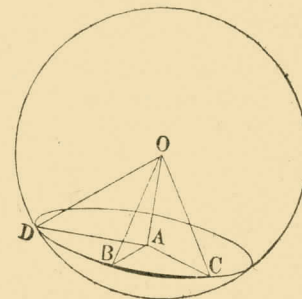
§ 387. Uczeń zbada i sformułuje warunki, którym czy- ni zadość prosta, jeżeli: 1) nie ma punktów spólnych z powierzchnią kulistą, 2) ma z nią jeden punkt spólny; 3) przebija tę powierzchnię w dwóch punktach.

[Wskazówka: przez prostą i środek kuli przesuwamy płaszczyznę, poczym sprowadzamy zagadnienie do położenia prostej względem koła].

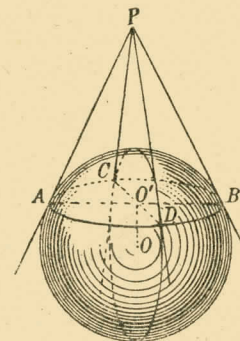
§ 388. Twierdzenie. *Z punktu zewnętrznego można poprowadzić dowolną ilość prostych, stycznych do powierzchni kulistej.*

Proste te tworzą stożek, styczny do kuli według koła małego.

Niech będzie dany punkt zewnętrzny P (rys. 340). Każda płaszczyzna, przesunięta przez prostą OP , przecina kulę według koła wielkiego, do każdego zaś z tych kół możemy z punktu P poprowadzić po dwie styczne.



Rys. 339.



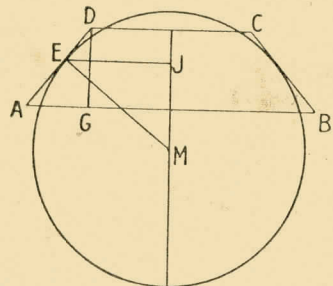
Rys. 340.

Wszystkie te styczne równają się sobie (dlaczego?). Jeśli teraz z punktów styczności A, B, C, D i t. d. poprowadzimy prostopadłe do prostej OP , przetną się one wszystkie w jednym punkcie O' , a to z powodu równości trójkątów $\triangle OPB, \triangle OPC, \triangle OPD$ i t. d. Wobec tego odcinki $O'B, O'C, O'D \dots$ leżą w jednej płaszczyźnie prostopadłej do prostej OP , a że równają się one sobie (dlaczego?), zatem linia $BCD \dots$ jest okręgiem koła małego na kuli.

§ 389. Zauważmy jeszcze, że jeśli płaszczyzna α jest styczna do kuli w punkcie M , wówczas każda prosta tej płaszczyzny, przechodząca przez punkt M , jest również styczna do kuli (dlaczego?).

§ 390. Jeżeli półkole obracać będziemy dokoła średnicy, zakreśli ono kulę. To spostrzeżenie ułatwi nam ustalenie pojęć pola powierzchni kulistej oraz objętości kuli. Najpierw jednak dowiedziedziemy następującego twierdzenia pomocniczego.

Twierdzenie pomocnicze. Pole powierzchni bocznej pnia stożkowego równa się iloczynowi z wysokości pnia przez obwód koła wielkiego kuli, która dotyka powierzchni pnia według koła równoodległego od obu podstaw.



Rys. 341.

Na rys. 341 mamy przekrój pnia i kuli, o której mowa w twierdzeniu. Kładąc $DG = h$, $EM = R$ mamy dowieść, że pole powierzchni pnia wyraża się iloczynem $2\pi Rh$.

Oznaczając EJ przez r , tworzącą AD przez l , mamy najpierw

$$4r = AB + DC,$$

zatem pole powierzchni pnia wyraża się wzorem

$$S = 2\pi rl \dots \dots \dots (1).$$

Z podobieństwa trójkątów $\triangle ADG \sim \triangle MEI$ wynika, iż

$$AD : DG = EM : EI$$

czyli

$$l : h = R : r,$$

skąd

$$rl = Rh \dots \dots \dots (2),$$

z równań zaś (1) i (2) wynika, że istotnie

$$S = 2\pi Rh.$$

Uwaga. Łatwo przekonać się, że wzór ten nie ulegnie żadnej zmianie, jeżeli przez powiększanie się stopniowe podstawy górnej pień stożkowy przekształci się w walec.

Tak samo, jeżeli podstawę górną pnia będziemy zmniejszali, pień przekształci się stopniowo w stożek, wzór jednak pozostanie prawdziwy. Istotnie, pole S powierzchni bocznej stożka wyraża się wzorem

$$S = \pi rl$$

gdzie $r = AO$, $l = AB$.

Zauważmy, że $EI = \frac{1}{2}r$ i że z podobieństwa trójkątów $\triangle ABO \sim \triangle EIM$ mamy

$$AB : BO = EM : EJ$$

czyli

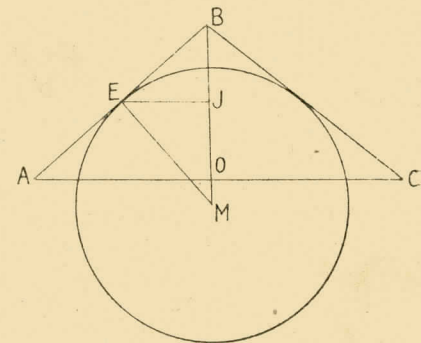
$$l : h = R : \frac{1}{2}r$$

albo

$$\frac{1}{2}rl = Rh,$$

zatem

$$S = 2\pi Rh.$$

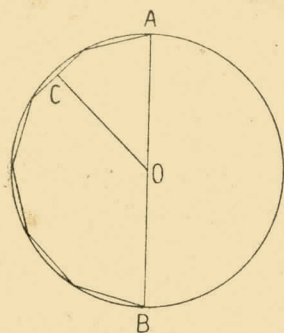


Rys. 342.

§ 391. Wyobraźmy sobie teraz, iż, mając dany okrąg koła (O) r , wpisaliśmy w niego wielokąt foremny o n bokach. Oznaczmy apotemę wielokąta przez a_n .

Jeżeli figurę naszą obracać będziemy dokoła średnicy AB (rys. 343), okrąg zakreśli powierzchnię kulistą, wielokąt zaś zakreśli bryłę, złożoną ze stożków, pni stożkowych i walców, a więc z brył do których stosuje się twierdzenie pomocnicze, dowiedzione w § 390.

Kula, zakreślona ze środka O promieniem równającym się apotemie OC , będzie styczną do powierzchni każdej z tych brył, a koło styczności przechodzić będzie przez środki tworzących. Będzie to więc właśnie ta kula, o której mowa w twierdzeniu pomocniczym.



Rys. 343.

Wysokości wszystkich poszczególnych brył dadzą po zsumowaniu średnicę AB , zatem pole powierzchni, otrzymanej przez obrót wielokąta, musi się równać

$$2\pi a_n \cdot 2r = 4\pi r a_n.$$

Jeżeli teraz stopniowo podwajając będziemy liczbę boków wielokąta, otrzymamy ciąg nieskończony rosnący

$$4\pi r a_n, 4\pi r a_{2n}, 4\pi r a_{4n}, \dots$$

Z łatwością możemy się przekonać, iż ciąg ten dąży do oznaczonej granicy, którą jest liczba $4\pi r^2$.

Istotnie, różnica

$$4\pi r^2 - 4\pi r a_k = 4\pi r(r - a_k)$$

maleje nieograniczenie, jeżeli tylko różnica między promieniem r i apotemą a_k maleje nieograniczenie.

Że tak jest, możemy przekonać się w sposób następujący.

Jeżeli MN jest bokiem wielokąta foremnego, OS jego apotemą, wówczas odcinek SP jest różnicą między promieniem i apotemą. Otóż mamy

$$SP < MP,$$

że zaś odcinek MP , jako bok wielokąta foremnego wpisanego o dwa razy większej liczbie boków, maleje nieograniczenie przy podwajaniu liczby boków (§ 379, str. 375), zatem odcinek SP musi tymbardziej maleć nieograniczenie.

Widzimy tedy, że powierzchnia naszej bryły obrotowej dąży do granicy $4\pi r^2$. Granicę tę nazywamy polem powierzchni kulistej.

§ 392. Jeżeli zamiast okręgu obracać będziemy łuk koła dookoła średnicy, przechodzącej przez środek lub początek łuku, wówczas otrzymamy część kuli, zwaną odcinkiem kulistym.

Wpisując w ten łuk łamaną foremną i powtarzając to samo rozumowanie, które stosowaliśmy do kuli, otrzymamy wzór na pole powierzchni bocznej odcinka kulistego

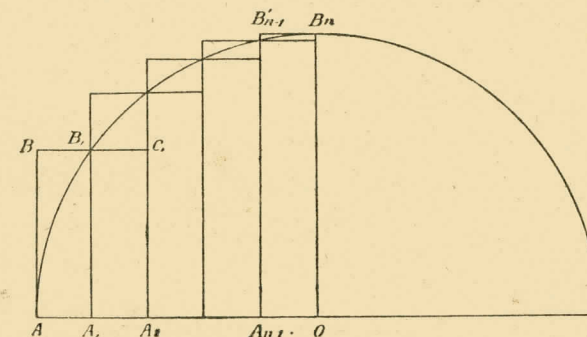
$$2\pi r h,$$

w którym h oznacza wysokość odcinka, r zaś promień kuli.

Uczeń przeprowadzi całe rozumowanie szczegółowo.

§ 393. Chcąc ustalić pojęcie objętości kuli, możemy postąpić w sposób następujący.

Promień OA półkola podzielmy na n równych części i w punktach podziału wystawmy prostopadłe do jego średnicy, następnie zaś zbudujmy dwa ciągi prostokątów (jak na rys. 345), z których jedno mieszczą się całkowicie w półkole, inne zaś częściowo wystają poza półkole.



Rys. 345.

Jeżeli całą figurę obracać będziemy dookoła średnicy, otrzymamy dwa ciągi walców, z których jedno leżą wewnątrz kuli (możemy je nazwać wewnętrznymi) inne zaś wystają poza kulę (nazwijmy je zewnętrznymi).

Zauważmy, że każdemu walcowi zewnętrznemu odpowiada równy mu wałeczek wewnętrzny z wyjątkiem tylko największego walca zewnętrznego, t. j. zakreślonego przez obrót prostokąta $A_{n-1}B_{n-1}BO$: wśród walców wewnętrznych nie ma równego mu. Jeśli więc zsumujemy objętości wszystkich walców wewnętrznych, osobno zaś dodamy do siebie objętości wszystkich walców zewnętrznych, to jedna suma różnić się będzie od drugiej o największy wałeczek zewnętrzny. Objętość tego walca równa się

$$\pi r_i^2 \cdot \frac{r}{n} = \frac{\pi^3}{n^3},$$

możemy ją więc uczynić dowolnie małą przez zwiększanie liczby n , t. j. liczby podziałek.

Jak widzimy, przy nieograniczonym zwiększaniu liczby podziałek obie sumy dążą do wspólnej granicy. Tę właśnie granicę nazywamy *objętością kuli*.

§ 394. Postarajmy się wyznaczyć tę granicę dokładniej. W tym celu zauważmy, że jeśli przez $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ oznaczmy promienie podstaw kolejnych walców zewnętrznych, poczynając od najmniejszego, wówczas będziemy mieli

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \frac{r}{n} \cdot \left(2r - \frac{r}{n}\right) = \frac{r^2}{n^2} (2n-1) & v_1 &= \frac{\pi r^3}{n^3} (2n-1) \\ r_2^2 &= \frac{2r}{n} \cdot \left(2r - \frac{2r}{n}\right) = \frac{2r^2}{n^2} (2n-2) & v_2 &= \frac{\pi 2r^3}{n^3} (2n-2) \\ r_3^2 &= \frac{3r}{n} \cdot \left(2r - \frac{3r}{n}\right) = \frac{3r^2}{n^2} (2n-3) & v_3 &= \frac{\pi 3r^3}{n^3} (2n-3) \\ &\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ r_n^2 &= \frac{nr}{n} \cdot \left(2r - \frac{nr}{n}\right) = \frac{nr^2}{n^2} (2n-n) & v_n &= \frac{\pi nr^3}{n^3} (2n-n) \end{aligned}$$

Sumując objętości wszystkich walców i oznaczając tę sumę przez Σ , mamy

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{\pi r^3}{n^3} [2n + 2 \cdot 2n + 3 \cdot 2n + \dots + n \cdot 2n - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)] \\ &= \frac{\pi r^3}{n^3} [2n(1 + 2 + 3 + \dots + n) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)] \\ &= \frac{\pi r^3}{n^3} \left[n^2(n+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\ &= \pi r^3 \left[1 + \frac{1}{n} - \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6} \right]. \end{aligned}$$

Teraz już z łatwością wykazać możemy, że przy nieograniczonym zwiększaniu liczby n suma Σ dąży do granicy, która równa się $\frac{2}{3}\pi r^3$.

Istotnie

$$\begin{aligned} \Sigma - \frac{2}{3}\pi r^3 &= \pi r^3 \left[1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right] - \frac{2}{3}\pi r^3 \\ &= \pi r^3 \left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right] \end{aligned}$$

Prawa część tej równości składa się z dwóch czynników, z których pierwszy πr^3 jest liczbą stałą, drugi zaś $\frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}$ maleje nieograniczenie, gdy n rośnie nieograniczenie, a więc różnica między Σ i stałą liczbą $\frac{2}{3}\pi r^3$ istotnie maleje nieograniczenie.

Dowodzi to, że suma Σ dąży granicy $\frac{2}{3}\pi r^3$. Granica ta, zgodnie z naszym określeniem, jest objętością półkuli, *objętość zaś całej kuli wyraża się wzorem*

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

§ 395. Twierdzenie. *Objętość odcinka kulistego wyraża się wzorem*

$$v = \pi h^2 r - \frac{1}{3}\pi h^3,$$

w którym h oznacza wysokość odcinka.

Uczeń dowiedzie tego wzoru, stosując tę samą metodę, którą zastosowaliśmy do całej kuli.

Ćwiczenia XL. 1. Jakie jest miejsce geometryczne środków kół, przechodzących przez dwa dane punkty? przez jeden punkt dany?

2. Przez punkt dany wewnątrz kuli poprowadzić płaszczyznę tak, by otrzymać koło o możliwie najmniejszym polu. — Jakie jest analogiczne zadanie planimetryczne?

3. Przez punkt A poprowadzić płaszczyznę, styczną do danej kuli i równoległą do danej płaszczyzny α .

4. Przez punkt A poprowadzić płaszczyznę, styczną do danej kuli i równoległą do danej prostej m .

5. To samo pytanie, jeżeli prosta styczna ma być równoległa do danej płaszczyzny α .

6. Jakie jest miejsce geometryczne punktów w przestrzeni, z których dany odcinek AB widać pod kątem prostym?

7. Dowieść, że dwie kule przecinają się zawsze według okręgu koła. Jak leży to koło względem linii środków obu kul? Jaką fi-

gurę płaską otrzymamy, przecinając naszą figurę płaszczyzną, przechodzącą przez środki obu kul?

8. Jeżeli z punktu M poprowadzimy wszystkie styczne do kuli, otrzymamy, jak wiadomo, stożek, który dotyka kuli według okręgu pewnego koła małego. Dowieść, że punkt M wraz ze środkiem tego koła dzielą harmonicznie średnicę kuli.

9. Wyznaczyć środek jednokładności dwóch danych kul.

10. Jakie jest miejsce geometryczne środków kul, stycznych do płaszczyzny α w danym jej punkcie M ?

11. Jakie jest miejsce środków kul, stycznych do danej prostej a w danym jej punkcie M ? stycznych do dwóch prostych równoległych? stycznych do dwóch przecinających się płaszczyzn?

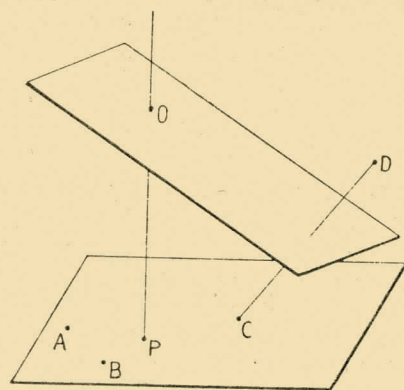
12. Dane są dwie przecinające się proste m, n . Zbudować kulę, która byłaby styczną do obu prostych i przechodziła przez punkt A , leżący w płaszczyźnie $[mn]$. Ile rozwiązań posiada nasze zadanie?

13. To samo zadanie, jeżeli proste m, n są do siebie równoległe.

14. Dane są dwie płaszczyzny α i β i punkt M , leżący wewnątrz klina $[\alpha\beta]$. Zbudować kulę, styczną do obu płaszczyzn i przechodzącą przez punkt M .

15. Jeżeli można zbudować kulę styczną do wszystkich sześciu krawędzi czworościanu, wówczas suma dowolnej pary przeciwległych krawędzi czworościanu równa się sumie każdej innej pary jego krawędzi przeciwległych.

16. Dane są cztery punkty A, B, C, D nie leżące w jednej płaszczyźnie, przyczem żadne trzy z pośród nich nie leżą na jednej prostej. Wykazać, że istnieje w przestrzeni jeden i tylko jeden punkt równoodległy od punktów A, B, C, D .



Rys. 346.

na ta przecina prostą w jakimś punkcie O , który jest jednakowo odległy od A, B, C i D].

[Niech P będzie środkiem koła ABC . Prosta PO , prostopadła do płaszczyzny tego koła, jest miejscem punktów przestrzeni równoodległych od punktów A, B i C . Jeżeli teraz połączymy C z D i poprowadzimy płaszczyznę, dzielącą odcinek CD na połowy i prostopadłą do tego odcinka, będzie ona miejscem punktów równoodległych od końców odcinka CD . Płaszczyzna ta nie może być równoległa do prostej PO , w przeciwnym bowiem razie punkt D leżałby w płaszczyźnie ABC , co przeczy założeniu. Tak więc płaszczyz-

17. Z poprzedniego zadania wywnioskować ile potrzeba punktów do wyznaczenia kuli.

Czy można opisać kulę na czworościanie i ile takich kul opisać można?

18. W dany czworościan wpisać kulę.

19. Jeżeli mamy dany czworościan foremny, możemy zbudować kulę, styczną do wszystkich jego krawędzi.

20. Z punktu A , jako ze środka, zakreślić kulę styczną do innej, danej kuli.

21. Z punktu A , jaki ze środka, zakreślić kulę tak, by dana płaszczyzna α przecięła ją według koła o danym promieniu r .

22. Zbudować kulę o promieniu r , która z daną płaszczyzną α przecinałaby się według koła o promieniu $= a$.

23. Zbudować kulę, styczną do płaszczyzny α w punkcie M i przechodzącą przez dany punkt L . Ile rozwiązań?

24. To samo zadanie, jeżeli zamiast M mamy dany promień r kuli.

25. Zbudować kulę, przechodzącą przez trzy dane punkty A, B, C i styczną do danej płaszczyzny α .

26. Łączymy punkt A , leżący zewnątrz kuli, z okręgiem koła wielkiego tak, iż powstaje stożek prosty. Stożek ten przecina kulę. Za pomocą konstrukcji planimetrycznej znaleźć promień tego przekroju, jeżeli mamy dane: długość stycznej do kuli, poprowadzonej z punktu A , oraz sumę promienia kuli i wysokości stożka.

27. Zbudować (planimetrycznie) przekrój osiowy pnia stożkowego, opisanego na danej kuli, mając dany promień kuli i tworzącą pnia.

28. Znaleźć promień kuli wpisanej w promień stożkowy, mając daną tworzącą pnia i różnicę promieni jego podstaw.

Uczeń znajdzie następujące miejsca geometryczne, dla każdego z nich poszuka analogicznego miejsca punktów na płaszczyźnie i przekona się, w jaki sposób otrzymać można miejsce punktów na płaszczyźnie, jeżeli znamy odpowiednie miejsce punktów w przestrzeni.

29. Jakie jest miejsce geometryczne rzutów punktu stałego A na wszystkie płaszczyzny, przechodzące przez stały punkt B ?

30. Jakie jest miejsce środków kół, wyznaczonych na kuli przez pęk płaszczyzn siecznych (t. j. przez płaszczyzny o wspólnej krawędzi)?

31. Rozważamy wszystkie kule o promieniu r , styczne do danej płaszczyzny α . Jakie jest miejsce geometryczne punktów styczności tych kul z płaszczyznami β , które wszystkie są do siebie równoległe i tworzą stały kąt z płaszczyzną α ?

32. Jakie jest miejsce punktów, z których możemy poprowadzić do danej kuli trzy styczne tak, iż w utworzonym przez nie trójszcianie wszystkie ściany są kątami prostymi?

33. Jakie jest miejsce punktów, z których można poprowadzić równe styczne do dwóch kul danych?

34. To samo pytanie, jeżeli mamy dane trzy kule.

35. Jakie jest miejsce geometryczne punktów, których odległości od dwóch stałych punktów są do siebie w stałym stosunku?

35. Kulę przecięto płaszczyzną w odległości $= m$ od środka. Jaki jest stosunek pola przekroju do pola koła wielkiego?

36. Kulę przecięto dwiema płaszczyznami. Stosunek odległości tych płaszczyzn od środka kuli $= m$; pola przekrojów równają się odpowiednio a^2 i b^2 . Obliczyć promień kuli.

37. W półkulę wpisano stożek, mający z nią wspólną podstawę. Dwie te bryły przecinamy płaszczyzną w połowie wysokości stożka. Obliczyć pole pierścienia kołowego, który utworzył się na płaszczyźnie siecznej, jeżeli wiadomo, że promień półkuli $= r$ i że płaszczyzna sieczna jest równoległa do podstawy półkuli.

38. Dana jest kula o promieniu r . Z dowolnego punktu na jej powierzchni zakreślamy drugą kulę tym samym promieniem. Obliczyć długość linii przecięcia się tych dwu powierzchni.

39. Na wspólnej podstawie po jednej jej stronie zbudowano półkulę i stożek. Wysokość stożka jest m razy większa od promienia półkuli. Obliczyć pole koła, według którego przecinają się te dwie powierzchnie, oraz odległość tego koła od podstawy stożka.

40. Na wspólnej podstawie po jednej jej stronie zbudowano półkulę i stożek, którego wysokość jest m razy większa od promienia półkuli. Na jakiej wysokości nad podstawą należy poprowadzić równoległą do niej płaszczyznę sieczną, żeby pole przekroju półkuli było k razy większe od pola przekroju stożka.

41. Na płaszczyźnie położono cztery równe kule tak, iż środki ich tworzą kwadrat. Mając dany promień r tych kul, obliczyć: 1) promień najmniejszej kuli, stycznej zewnętrznie do wszystkich czterech kul; 2) promień najmniejszej kuli, do której cztery dane kule są wewnętrznie styczne.

42. Na dnie sześcianu umieszczono cztery równe sobie kule, z których każda dotyka dwóch sąsiednich kul i jest styczna do trzech ścian sześcianu. Obliczyć: 1) promień piątej kuli, która leżąc również na dnie sześcianu, byłaby styczna do czterech danych kul; 2) promień szóstej kuli, która leżąc na czterech danych dotykałaby zarazem górnej podstawy sześcianu.

43. Mając daną krawędź a sześcianu, obliczyć: 1) objętość kuli wpisanej, 2) objętość kuli opisanej, 3) objętość kuli stycznej do wszystkich krawędzi sześcianu.

38. Mając daną krawędź a czworościanu foremnego, obliczyć: 1) pole powierzchni kuli wpisanej, 2) pole powierzchni kuli opisa-

nej, 3) pole powierzchni kuli stycznej do wszystkich krawędzi czworościanu.

Jaka zależność zachodzi między tymi trzema liczbami?

44. Na wspólnej podstawie zbudowano półkulę, walec opisany na niej i stożek wpisany w nią. Jaki stosunek zachodzi między objętościami tych brył? Między polami ich powierzchni bocznych?

45. Mając dany odcinek $AB = a$, zakreślono koło $(O)B$ tak, że gdy poprowadzono do niego styczną AC , okazało się, iż przy obrocie figury dookoła osi AB powstają stożek i kula, których pola powierzchni równają się sobie. Obliczyć promień r .

46. W koło o promieniu r wpisano kwadrat, poczym całą figurę zaczęto obracać dookoła przekątnej kwadratu. Obliczyć objętość wszystkich brył, jakie przy tym powstały.

47. To samo zadanie, jeżeli osią obrotu jest średnica koła, równoległa do dwóch boków tego kwadratu.

48. Jaki jest stosunek między objętościami (lub między polami powierzchni) stożka równobocznego*), kuli wpisanej w niego i kuli na nim opisanej?

49. To samo pytanie dla ośmiościanu foremnego i dwóch kul: wpisanej w niego i opisanej na nim.

50. Z punktu A , leżącego na powierzchni kuli o promieniu r , zakreślono drugą kulę tym samym promieniem. Jak wielkie jest pole powierzchni i jak wielka objętość bryły, wspólnej obu kulom.

51. Kulę przecięto płaszczyzną w odległości a od środka, poczym w oba odcinki kuliste wpisano możliwie największe kule, styczne do kuli danej i do płaszczyzny siecznej. Obliczyć stosunek objętości obu wpisanych kul do kuli danej.

52. Na trójkącie foremnym o boku $= a$ zbudowano graniastosłup prosty, w którym pole powierzchni bocznej równa się połowie pola powierzchni zupełnej. Obliczyć: 1) objętość tej bryły; 2) pole powierzchni i objętość kuli, opisanej na graniastosłupie.

53. W kulę o promieniu r wpisano pień ostrosłupowy o podstawie kwadratowej. Podstawa dolna pnia wpisana jest w koło wielkie, ściany zaś boczne są nachylone do podstawy pod kątem 60° . Obliczyć objętość i pole powierzchni bocznej pnia.

54. Na sześciianie opisano kulę. Obliczyć objętości odcinków kulistych, które otrzymamy, przedłużając ściany sześcianu. Krawędź sześcianu $= a$.

55. To samo pytanie dla ośmiościanu foremnego.

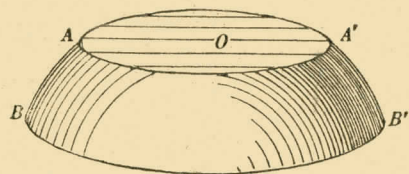
56. Daną kulę przeciąć płaszczyzną tak, by pole przekroju równało się różnicy pól powierzchni obu odcinków kulistych.

57. W stożek równoboczny wpisano kulę; nad nią umieszczono drugą kulę, która dotyka zarówno pierwszej kuli jak powierzchni stożka; nad tą drugą kulą umieszczono w taki sam sposób trzecią

*) Równobocznym nazywamy taki stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem foremnym.

kulę, i t. d. Obliczyć granicę, do której dąży suma objętości tych kul, gdy liczbę ich zwiększamy nieograniczenie.

58. Cztery równe sobie kule leżą tak, że każda z nich jest styczna do trzech pozostałych. Na kulach opisano stożek, którego powierzchnia boczną i podstawa dotykają kul. Wykazać, że stosunek między promieniem podstawy stożka, jego wysokością i tworzącą równa się stosunkowi $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.



Rys. 347.

59. Znaleźć wzór na objętość warstwy kulistej (rys. 347), którą otrzymamy, przecinając kulę dwiema płaszczyznami, do siebie równoległymi.

Dodatek do Stereometriji.

O rysowaniu brył w rzucie ukośnym równoległym.

Każdą figurę płaską możemy przedstawić zapomocą rysunku tak wiernie i z taką dokładnością, na jaką tylko pozwalają nasze przybory rysunkowe. Inaczej rzecz ma się, jeśli chodzi o bryły: możemy conajwyżej wykonać rysunek figury płaskiej, która z bryłą pozostawać będzie w pewnym związku geometrycznym, tak iż z własności tej figury płaskiej będziemy mogli wnosić o własnościach bryły.

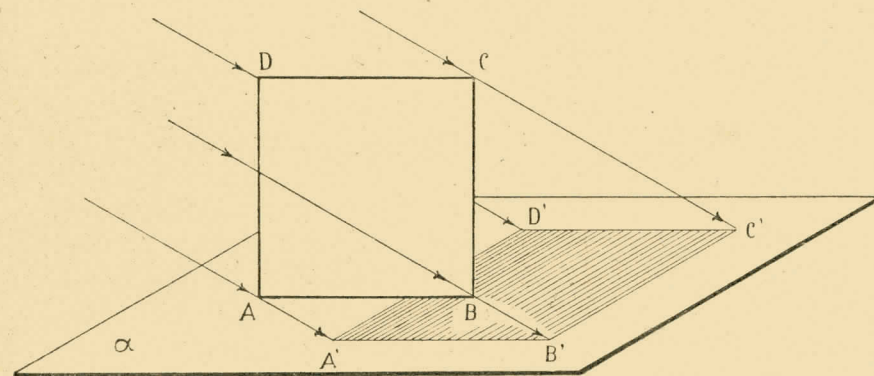
Istnieją rozmaite metody wykonywania (budowania) figur płaskich, związanych w ten sposób z bryłami. Do naszych celów najodpowiedniejszą jest t. zw. metoda rzutów ukośnych równoległych, gdyż obrazy dają się według niej wykonać z łatwością i mogą wywoływać w nas złudzenie, iż istotnie widzimy przed sobą bryłę.

Wyobraźmy sobie, że na kwadrat $ABCD$, zrobiony z tektury lub innego materiału nieprzezroczystego, pada wiązka promieni równoległych i że tę wiązkę przecięliśmy płaszczy-

zną α równoległą do kwadratu i położoną za nim. Kwadrat nasz rzuci wówczas na płaszczyznę α cień, który będzie miał również kształt kwadratu $A'B'C'D'$.*)

Cień ten nazywamy *rzutem równoległym* kwadratu $ABCD$, płaszczyznę zaś α nazywamy *płaszczyzną rzutów* albo *płaszczyzną obrazu*.

Promienie mogą być prostopadłe do płaszczyzny obrazu — wówczas obraz nazywamy *rzutem prostokątnym*; mogą one być jednak nachylone pod innym jakimś kątem do płaszczyzny obrazu, a wówczas rzut zwie się *ukośnym równoległym*. — W dalszym ciągu będzie mowa tylko o rzucie ukośnym.



Rys. 348.

Przypuśćmy teraz, że kwadrat $ABCD$ nachyliliśmy do płaszczyzny obrazu, tak jednak, iż dwa jego boki AB , CD są do tej płaszczyzny równoległe. Jeżeli promienie, przechodzące przez boki AD , CB , leżą w płaszczyznach prostopadłych do krawędzi przecięcia się płaszczyzny kwadratu $ABCD$ z płaszczyzną rzutów, wówczas obrazem naszego kwadratu musi być prostokąt $A'B'C'D'$, przyczem dwa jego boki $A'B'$, $C'D'$ równają się bokom AB , CD kwadratu (dlaczego?), pozostałe zaś boki $A'D'$, $C'B'$ są albo oba krótsze, albo oba dłuższe od odpowiednich boków kwadratu.

Uczeń sam ustali, kiedy mianowicie dwa te boki prostokąta są krótsze, kiedy zaś dłuższe od boków kwadratu.

*) Uczeń przerobi zarówno niniejsze doświadczenie, jak i wszystkie dalsze.

Przypuśćmy wreszcie, że kwadrat znajduje się w takim samym położeniu, jak poprzednio (t. j. boki jego AB , CD są równoległe do płaszczyzny obrazu), ale promienie, przechodzące przez boki AD , CB leżą w płaszczyznach, które nie są prostopadłe do krawędzi, według której płaszczyzna kwadratu $ABCD$ przecina się z płaszczyzną obrazu (rys. 348). Obrazem kwadratu musi być czworobok $A'B'C'D'$, w którym boki $A'B'$, $C'D'$ są równoległe do AB , CD i równają się im (dlaczego?), boki zaś $A'D'$, $C'B'$ są do siebie równoległe, równają się sobie i są oba albo krótsze, albo dłuższe od odpowiednich boków kwadratu (dlaczego?), wreszcie kąty na obrazie są jedne ostre, inne rozwarte. Tak więc obrazem kwadratu jest w tym wypadku równoległobok.

Uczeń dowiedzie sam: 1) że odcinki równoległe rzutują się zawsze w postaci odcinków równoległych; 2) że jeśli a , b są dwoma odcinkami równoległymi, zaś a' , b' są ich rzutami, wówczas zachodzi zawsze proporcja $a:b = a':b'$; 3) w naturalnej wielkości odwzorowują się wszystkie odcinki równoległe do płaszczyzny obrazu; 4) jeżeli mamy dane dwie proste prostopadłe do płaszczyzny obrazu (np. AD , BC na rys. 348), wówczas na obrazie otrzymamy dwie równoległe do siebie proste, nachylone pod tym samym kątem β do prostej, łączącej punkty przebicia obu prostopadłych.

Ten kąt β jest w tym wypadku obrazem kąta prostego; kąt α , będący jego dopełnieniem do 90° , nazywać będziemy *skrzywieniem* obrazu.

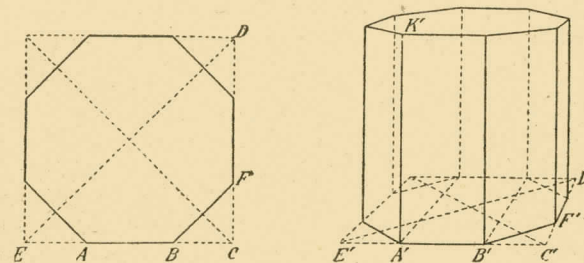
Jak widzimy, przy rzucie ukośnym każda figura, z wyjątkiem figur równoległych do płaszczyzny obrazu, ulega zniekształceniu, które polegać może: 1) na *skrzywieniu* (oznaczać je będziemy symbolem α) i 2) na *skróceniu* (oznaczać będziemy symbolem v). Rzecz prosta, że to, co nazwaliśmy skróceniem, może być w rzeczywistości wydłużeniem pewnych odcinków.

Zniekształcenie obrazu zależy od dwóch przyczyn: 1) od położenia figury względem płaszczyzny obrazu; 2) od kierunku promieni rzutujących. Zmieniając kierunek promieni i położenie figury, możemy osiągnąć dowolnej wielkości skrócenie i skrzywienie. Wobec tego przy rysowaniu figur w rzucie ukośnym możemy α i v obierać dowolnie, kierując się tylko tym, by obraz robił wrażenie naturalne i uwidocznił to wszystko, co chcemy na nim ujrzeć. Większość

figur stereometrycznych w książce niniejszej została wykreślona prz $\alpha = 30^\circ$, $v = \frac{1}{3}$ lub $\frac{1}{2}$.

Jako przykład rozwiążemy następujące

Zadanie. Wykreślić obraz danego graniastostupa o podstawie ośmiokątnej foremnej w założeniu, że płaszczyzna obrazu jest pionowa, podstawa zaś graniastostupa leży na płaszczyźnie poziomej $\alpha = 30^\circ$, $v = \frac{1}{2}$



Rys. 349.

Przedewszystkim ustawiamy graniastostup w położeniu najdogodniejszym, mianowicie tak, by dwie krawędzie podstawy były równoległe do płaszczyzny rzutów, przez co na obrazie otrzymamy je w wielkości naturalnej. Następnie na rysunku pomocniczym kreślimy tę podstawę w wielkości naturalnej i przedłużamy boki ośmiokąta tak, by utworzyć kwadrat opisany na ośmiokącie. Z kolei rysujemy rzut ukośny tego kwadratu. W tym celu kreślimy $E'C' = EC$, gdyż bok EC , jako równoległy do płaszczyzny rzutów, musi odwzorowywać się w wielkości naturalnej; na $E'C'$ budujemy równoległobok o kącie ostrym $= 90^\circ - \alpha = 60^\circ$ i o boku $C'D' = \frac{1}{2}CD$. Dalej odkładamy $E'A' = EA$, $A'B' = AB$. Ponieważ $BF \parallel ED$, zatem obrazy tych odcinków muszą być również do siebie równoległe. Kreślimy tedy $B'F' \parallel E'D'$ i mamy już obrazy trzech wierzchołków podstawy. Pozostałe obrazy wierzchołków uczeń znajdzie sam, kierując się tym spostrzeżeniem, że cztery krawędzie podstawy są równoległe do przekątnych kwadratu (a więc obrazy ich są równoległe do przekątnych równoległoboku), a cztery przekątne tej podstawy są równoległe do boków kwadratu. Teraz pozostaje już tylko wystawić w punkcie A' prostopadłą do $A'B'$, odłożyć na niej w naturalnej wielkości (dlaczego?) krawędź boczną $A'K'$, a przez wszystkie inne wierzchołki ośmiokąta poprowadzić odcinki, równające się $A'K'$ i równoległe do tej prostej.

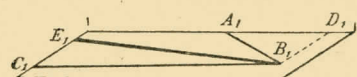
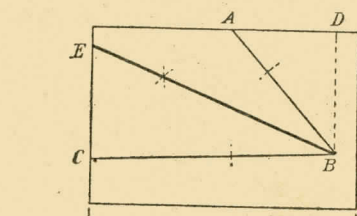
wreszcie prowadzimy szereg równoległych $Mm // Ll // Kk // \dots$. Mamy wówczas $um = v \cdot uM$, $si = v \cdot Js$, Wobec tego krzywa, wyznaczona przez punkty $A, m, l, k, \dots$ jest obrazem koła danego. Krzywa ta nazywa się *elipsą*.

Zauważmy, iż prosta JN , styczna do koła, rzutuje się w postaci stycznej do elipsy.

Jeżeli połączymy cięciwami punkty $A, m, l, \dots$, otrzymamy na rys. 350 dwunastokąt wpisany w elipsę, który jest obrazem dwunastokąta wpisanego w dane koło.

18. Wykreślić rzut ukośny walca.

19. Wykreślić rzut ukośny sześciokąta foremego.



$\alpha = 30^\circ$, $v = 1:2$.

Rys. 352.

20. Dany jest w rzucie ukośnym ($\alpha = 30^\circ$, $v = \frac{1}{2}$) obraz $\triangle A_1B_1C_1$ kąta; wykreślić jego dwusieczną. [Wskazówka: budujemy najpierw równoległobok, wykreślamy prostokąt, którego obrazem jest ten równoległobok, wyznaczamy w prostokącie punkty A, B, C , kreślimy dwusieczną BE , i t. d.]

21. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$. Kładąc $\alpha = 30^\circ$, $v = \frac{1}{2}$. Wykreślić obraz $\triangle A_1B_1C_1$ tego trójkąta; zbudować rzut piramidy, mającej trójkąt $\triangle ABC$ za podstawę i krawędź boczną AS prostopadłą do podstawy w punkcie A . Po wykonaniu rysunku

(1) wyznaczyć prawdziwą wielkość krawędzi SB, SC ;

(2) wykreślić siatkę piramidy.

22. W piramidzie, o której mowa w poprzednim zadaniu, znaleźć:

(1) prawdziwą wielkość kąta między ścianą SBC i płaszczyzną podstawy;

(2) prawdziwą wielkość innych dwusiecznych, np. między ścianami SBC i SAC .

23. Na danym kwadracie, jako na podstawie, zbudować piramidę prostą o takiej wysokości, żeby ściany boczne nachylone były do podstawy pod danym kątem.

24. Na trójkącie foremnym zbudować ostrosłup o takiej wysokości, żeby pole jego powierzchni bocznej było cztery razy większe od pola podstawy.

25. W wierzchołkach trójkąta $\triangle ABC$ wystawiamy prostopadłe do jego płaszczyzny i na nich odkładamy trzy nierówne odcinki AA_1, BB_1, CC_1 ; znaleźć krawędź przecięcia się płaszczyzny ABC z płaszczyzną $A_1B_1C_1$.

26. Wykreślić graniastosłup oraz dwa punkty A, B na jego powierzchni bocznej; znaleźć punkty, w których prosta AB przebija obie podstawy graniastosłupa.

Po czym poznać można na rysunku, czy prosta AB jest czy nie jest równoległa do podstaw?

27. Dany jest trójscian oraz trzy punkty A, B, C na jego ścianach; wykreślić trójkąt, według którego płaszczyzna ABC przecina trójscian. [Wskazówka: jak znaleźć punkt, w którym prosta AB przebija trzecią ścianę trójscianu?]

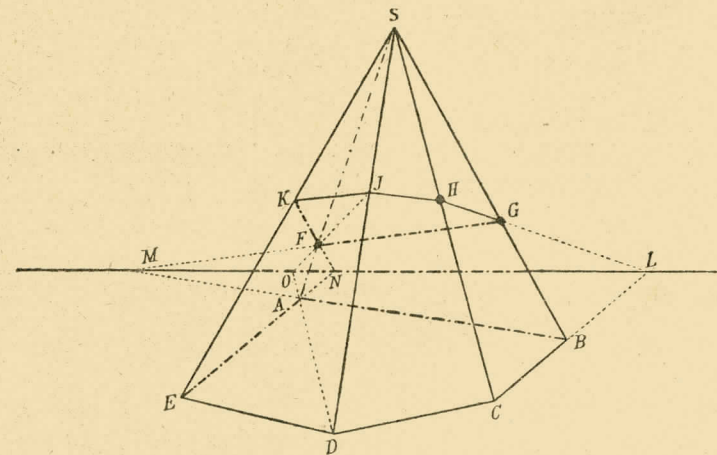
28. W prostopadłościanie $ABCD A' B' C' D'$ znaleźć punkt, w którym przekątna AC' przebija płaszczyznę przekątną $A' B' C D$.

29. To samo zagadnienie, jeżeli zamiast prostopadłościanu mamy równoległościan pochyły.

30. Na trzech krawędziach bocznych prostopadłościanu obramy trzy dowolne punkty A, B, C . Wyznaczyć:

(1) punkt przecięcia czwartej krawędzi bocznej z płaszczyzną ABC ;

(2) krawędź przecięcia się płaszczyzny ABC z płaszczyzną podstawy prostopadłościanu.



Rys. 353.

31. Dana jest w rzucie ukośnym piramida $SABCDE$ oraz trzy punkty na jej krawędziach, mianowicie F na SA , G na SB , H na SC . Wykreślić (1) w rzucie ukośnym; (2) w wielkości naturalnej wielokąt, według którego płaszczyzna FGH przecina piramidę.

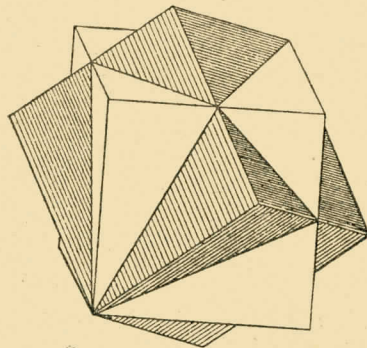
32. To samo zadanie, jeżeli punkty F, G, H dane są na trzech niekolejnych krawędziach bocznych.

33. To samo zadanie, jeżeli F, G, H są trzema punktami, leżącymi na ścianach piramidy, lecz nie na krawędziach.

34. Na krawędziach sześcianu dane są trzy punkty A, B, C . Wykreślić przekrój sześcianu, wyznaczony przez płaszczyznę ABC .

35. Przeciąć sześcián dowolną płaszczyzną, prostopadłą do jego przekątnej.

36. Dana jest piramida $SABC$ o dowolnej czworokątnej podstawie; przeciąć ją płaszczyzną tak, by otrzymać w przekroju równoległobok, którego jeden wierzchołek winien leżeć w punkcie A' na krawędzi SA . [Wskazówka: jeżeli żądany równoległobok oznaczmy przez $A'B'C'D'$, wówczas boki jego $A'B'$, $C'D'$ muszą być równoległe do krawędzi przecięcia się płaszczyzn SAB i SCD (dla czego?).]



Rys. 354.

37. Czwo-rościan foremny przeciąć tak płaszczyzną, by otrzymać w przekroju kwadrat.

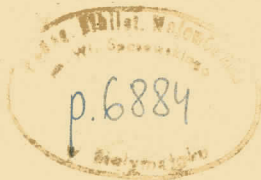
Zbudować siatkę obu części, na które rozpadł się czwo-rościan.

38. W dany ostrosłup o podstawie kwadratowej wpisać sześcián.

39. Środki dwóch przeciwnych ścian sześciánu łączymy z wierzchołkami tak, by otrzymać dwa ostrosłupy o podstawach kwadratowych. Wy-

kreślić część spólną obu ostrosłupom.

40. Zbudować siatkę bryły, złożonej z dwóch równych przienikających się sześciánów, jak wskazuje rys. 353.



SPIS RZECZY.

	Str.
Przedmowa	V
Spis liter greckich, użytych w książce niniejszej	1
Spis symbolów, używanych w zadaniach konstrukcyjnych	2
Spis pewników, na których został oparty wykład w książce niniejszej	3

Wiadomości wstępne:

Własności prostej	9
O pojęciu kąta	13
Koło i okrąg koła	18

KSIEGA I.

O równości i symetrii figur płaskich.

Rozdział I. Pojęcie o trójkącie. O równości trójkątów	24
„ II. Trójkąt równoramienny	34
„ III. Kąt zewnętrzny. Klasyfikacja trójkątów. Cechy równości trójkątów prostokątnych	44
„ IV. O nierównych elementach w trójkącie	47
„ V. Teoria równoległych	53
„ VI. O figurach symetrycznych	70
„ VII. O pojęciu miejsca geometrycznego	75
„ VIII. O trójkątach nierównych	78
„ IX. O kole	80
A. O różnych położeniach prostej względem koła	80
B. O kołach, przechodzących przez trzy punkty lub stycznych do trzech prostych	89
C. O położeniu dwóch kół względem siebie	94
D. O kątach w kole i o łukach	99

Dodatek do księgi I.

Str.

I. Przykłady poszukiwania miejsc geometrycznych	113
II. O rozwiązywaniu zadań konstrukcyjnych	123
A. Przykłady analizy geometrycznej	123
B. Metoda miejsc geometrycznych	132
C. Metody przekształceń	139
1. Przekształcenie przez przesunięcie	139
2. Obrót	142
3. Przekształcenie symetryczne	146

KSIĘGA II.

O równoważności wielokątów.

Rozdział I. Podstawowe twierdzenia i zadania o wielokątach równoważnych	151
„ II. Zastosowania do trójkątów. Twierdzenie Pitagora- sa i jego uogólnienie	170
„ III. Prostokąty zbudowane z cięciw	179

KSIĘGA III.

O figurach jednokładnych i podobnych.

Rozdział I. O proporcjach między odcinkami	187
„ II. Twierdzenie Talesa i wnioski z niego	194
„ III. O przekształceniu jednokładnym	203
„ IV. O podobieństwie	214
„ V. O podziale harmonicznym odcinka	220
„ VI. O biegunach i biegunowych względem koła	235

KSIĘGA IV.

O mierzeniu figur płaskich.

Rozdział I. O mierzeniu odcinków, kątów i wielokątów	244
„ II. O potędze punktu względem koła, o osiach pierwiast- nych i o pękach kół	267
„ III. O poprzecznych	276
„ IV. O zastosowaniu algebry do rozwiązywania zadań konstrukcyjnych	279
„ V. O wielokątach foremnych	284
„ VI. O pomiarze koła	293

KSIĘGA V.

O położeniu wzajemnym prostych i płaszczyzn.

Rozdział I. O prostych i płaszczyznach równoległych	311
„ II. O prostych i płaszczyznach prostopadłych	320
„ III. O kątach między prostymi i płaszczyznami	325

Str.

KSIĘGA VI.

O kątach bryłowych i wielościanach.

Rozdział I. O kątach bryłowych (narożach)	331
„ II. O wielościanach	343
A. O graniastosłupach	343
B. O ostrosłupach	353
C. O wielościanach foremnych	364

KSIĘGA VII.

Bryły obrotowe.

A. Walec obrotowy	368
B. Stożek obrotowy	372
C. O kuli	380

Dodatek do Stereometrii.

O rysowaniu brył w rzucie ukośnym równoległym	393
---	-----

E R R A T A.

Str. 62 w zadaniu 20 opuszczono uwagę: Zadanie to wymaga znajomości teorii trójkątów w równoważnych.

		<i>wydrukowano:</i>	<i>powinno być:</i>
„ 28	wiersz 2 od góry	możemy dowolnie zmieniać	możemy zmieniać
„ 41	„ 15 „ dołu	kątów wypukłych	kątów wklęsłych
„ 44	„ 2 „ „	$\nless ABC (\S \quad)$	$\nless ABC (\S 18)$
„ 81	„ 12 „ góry	$\S 108$	$\S 109$
„ 81	„ 5 „ dołu	$\S 109$	$\S 108$
„ 89	„ 5 „ „	stycznych w trzech punktach	stycznych do trzech prostych
„ 189	„ 14 „ góry	$AA'B'B$	$AA''B'B$
„ 191	„ 23 „ „	$\boxed{a \ d}$	$\boxed{a, \ d}$
„ 191	„ 23 „ „	$\boxed{b \ c}$	$\boxed{b, \ c}$
„ 192	„ 14 „ dołu	$\boxed{a \ b \ d}$	$\boxed{a + b, \ d}$
„ 192	„ 14 „ „	$\boxed{b, \ c \ d}$	$\boxed{b, \ c + d}$
„ 192	„ 2 „ góry	$\boxed{a, \ d}$	$\boxed{a, \ nd}$
„ 192	„ 2 „ „	$\boxed{b, \ c}$	$\boxed{b, \ nc}$
„ 216	„ 14 „ dołu	tych	tym
„ 223	„ 8 „ „	liczby dodatnie	liczby bezwzględne
„ 224	„ 15 „ góry	półproste	proste
„ 224	„ 16 „ „	Półproste	proste
„ 224	„ 17 „ „	z półprostymi	z prostymi
„ 238	„ 2 „ dołu	dwa drugie punkty przekątne	dwa pozostałe wierzchołki
„ 262	„ 5 „ „	Ptolomeusz	Ptolomeusz
„ 262	„ 7 „ „	Ptolomeusza	Ptolomeusza.
„ 264	„ 11 „ góry	$\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right)$	$\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right)^2$
„ 296	„ 14 „ „	od wysokości	od podwojonej wysokości
„ 337	„ 4 „ „	położenie OC	położenie OC''
„ 341	„ 5 „ dołu	kąta $\nless OBC$	kąta $\nless BOC$